

Vogliamo risolvere il problema $y' = -2ty^2$, $y(0) = 1$, $[a, b] = [0, 1]$ utilizzando BDF(2), un metodo multistep di ordine $p = 2$ con

$$p_1(z) = z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}, \quad p_2(z) = \frac{2}{3}z^2.$$

- Scrivere (con carta e penna) il problema $g(y) = 0$ da risolvere per calcolare $y = y_{n+2}$ dati y_{n+1}, y_n, t_{n+2} .
- Scrivere (in una funzione vuota) function handles $f = @(t, y) \dots$ e $df = @(t, y) \dots$ che calcolano f e la sua derivata (Jacobiano) $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$.
- Scrivere function handles $g = @(y) \dots$ e $dg = @(y) \dots$ che calcolano g in un punto y e la sua derivata, utilizzando f , df , $Y(n+1)$, $Y(n)$, $t(n+2)$.
- Scrivere una function $[t, Y] = \text{bdf2}(N)$ che risolve il problema dato: calcola il primo valore incognito $Y(2)$ con il metodo di Eulero esplicito, e ad ogni passo n utilizza 5 iterazioni del metodo di Newton $y^{(k+1)} = y^{(k)} - g(y^{(k)})/dg(y^{(k)})$ per trovare il valore y_{n+2} che risolve $g(y_{n+2}) = 0$. Qual è un buon valore iniziale?
Suggerimento: per controllare la corretta convergenza (quadratica) del metodo di Newton, visualizzare dopo ogni passo del metodo il valore $g(y^{(k)})$.
- Controllare che il metodo converge con ordine $p = 2$, confrontando la soluzione calcolata con quella esatta $y(t) = \frac{1}{1+t^2}$ (Matlab: `1 ./ (1+t.^2)`).