

# Simulazione di esame

## 16 dicembre 2021

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

Tempo a disposizione: 2 ore. È consentito consultare appunti e testi.

**Esercizio 1 (20 punti)** Sia  $p(x)$  il polinomio di interpolazione (di grado  $d < N$ ) alla funzione  $f(x) = \sin(x)$  su  $N$  nodi equispaziati in  $[0, \pi]$ .

1. Utilizzando il teorema del resto, calcolare una maggiorazione (stima dall'alto) per l'errore  $|p(x) - f(x)|$  ottenuto con  $N = 16$ . La maggiorazione deve valere per ogni  $x \in [0, \pi]$ .
2. Scrivere una function `y = interpolaseno(N, t)` che, dati in input  $N$  e un vettore  $t = [t_1, t_2, \dots, t_m]$ , calcola il vettore

$$y = [p(t_1) \quad p(t_2) \quad \dots \quad p(t_m)].$$

Ogni entrata  $y_i$  dev'essere calcolata utilizzando la formula di Lagrange.

*Suggerimento:* prima di tutto, scrivere separatamente una function `y = lagrange(x, k, t)` che, dato in ingresso  $t \in \mathbb{R}$ , calcola il valore del  $k$ -esimo polinomio di Lagrange  $L_k(t)$  sui nodi del vettore  $x \in \mathbb{R}^N$ .

3. Sia `z = linspace(0, pi, M)` un vettore di  $M$  punti equispaziati in  $[0, \pi]$ . Calcolare l'errore di interpolazione massimo

$$E = \max_{i=1,2,\dots,M} |p(z_i) - f(z_i)|$$

per  $N = 16$  e  $M = 1000$ . Calcolare lo stesso errore per  $N = M = 16$ . Cosa potete prevedere teoricamente su questi valori? I risultati sono quelli che vi aspettate?

4. (più difficile) Qual è il costo computazionale della funzione `lagrange(x, k, t)`? Qual è il costo computazionale della funzione `interpolaseno(N, t)`?

### Esercizio 2 (10 punti)

1. Scrivere una function `I = puntomedio(f, a, b, N)` che calcola un'approssimazione  $I$  di  $\int_a^b f(x)dx$  con il metodo del punto medio composito con  $N$  punti.
2. Qual è il valore esatto di  $I_{esatto} = \int_0^\pi \sin(x)dx$ ?
3. Calcolare l'errore  $E_N = |I - I_{esatto}|$  tra l'integrale esatto e l'approssimazione calcolata dalla funzione appena scritta, per  $N = 10, 20, 40$  punti.
4. Quanto valgono i rapporti  $E_{10}/E_{20}$  e  $E_{20}/E_{40}$ ? A che valore dovrebbero avvicinarsi questi rapporti?