

Simulazione di esame

16 dicembre 2021

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

Tempo a disposizione: 2 ore. È consentito consultare appunti e testi.

Esercizio 1 (20 punti) Sia $p(x)$ il polinomio di interpolazione (di grado $d < N$) alla funzione $f(x) = \sin(x)$ su N nodi equispaziati in $[0, \pi]$.

1. Utilizzando il teorema del resto, calcolare una maggiorazione (stima dall'alto) per l'errore $|p(x) - f(x)|$ ottenuto con $N = 16$. La maggiorazione deve valere per ogni $x \in [0, \pi]$.
2. Scrivere una function `y = interpolaseno(N, t)` che, dati in input N e un vettore $t = [t_1, t_2, \dots, t_m]$, calcola il vettore

$$y = [p(t_1) \quad p(t_2) \quad \dots \quad p(t_m)].$$

Ogni entrata y_i dev'essere calcolata utilizzando la formula di Lagrange.

Suggerimento: prima di tutto, scrivere separatamente una function `y = lagrange(x, k, t)` che, dato in ingresso $t \in \mathbb{R}$, calcola il valore del k -esimo polinomio di Lagrange $L_k(t)$ sui nodi del vettore $x \in \mathbb{R}^N$.

3. Sia `z = linspace(0, pi, M)` un vettore di M punti equispaziati in $[0, \pi]$. Calcolare l'errore di interpolazione massimo

$$E = \max_{i=1,2,\dots,M} |p(z_i) - f(z_i)|$$

per $N = 16$ e $M = 1000$. Calcolare lo stesso errore per $N = M = 16$. Cosa potete prevedere teoricamente su questi valori? I risultati sono quelli che vi aspettate?

4. (più difficile) Qual è il costo computazionale della funzione `lagrange(x, k, t)`? Qual è il costo computazionale della funzione `interpolaseno(N, t)`?

Esercizio 2 (10 punti)

1. Scrivere una function `I = puntomedio(f, a, b, N)` che calcola un'approssimazione I di $\int_a^b f(x)dx$ con il metodo del punto medio composito con N punti.
2. Qual è il valore esatto di $I_{esatto} = \int_0^\pi \sin(x)dx$?
3. Calcolare l'errore $E_N = |I - I_{esatto}|$ tra l'integrale esatto e l'approssimazione calcolata dalla funzione appena scritta, per $N = 10, 20, 40$ punti.
4. Quanto valgono i rapporti E_{10}/E_{20} e E_{20}/E_{40} ? A che valore dovrebbero avvicinarsi questi rapporti?