Esame di Calcolo Numerico — 6 giugno 2022

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica
Tempo a disposizione: 2 ore. È consentito consultare appunti e testi (cartacei).

Esercizio 1 (15 punti) Consideriamo la funzione $f(x) = 1/x$ sull'intervallo $I = [1, 5]$.

1. Scrivere una `function v = interpolazione(n, u)` che prende in input $n > 0$ e $u \in \mathbb{R}$ e fa queste tre cose:

   (a) Costruisce la matrice di Vandermonde con n nodi $x_1, x_2, \dots, x_n$ equispaziati tra 1 e 5.

   (b) Utilizza l'operatore di Matlab \ (backslash) per calcolare i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ del polinomio di interpolazione a $f(x)$ sui nodi $x_1, x_2, \dots, x_n$.

   (c) Calcola il valore $v = p(u)$ di questo polinomio di interpolazione nel punto u dato.

   Riportare sul foglio il codice della funzione.

2. Riportare, con la maggiore precisione possibile (usando `format long`) i valori calcolati dai comandi `interpolazione(11, 3)` e `interpolazione(11, 4)`. Per uno di questi due comandi sapete calcolare il valore del risultato calcolato in aritmetica esatta; quale dei due? Di quanto differisce il risultato calcolato da Matlab in aritmetica di macchina?

3. Riportare per $n = 4, 8, 12, 16$ il valore e_n calcolato come `interpolazione(n, pi) - 1/pi`. I valori e_n ottenuti indicano una convergenza del metodo più lenta o più veloce di quella lineare?

Esercizio 2 (15 punti) Consideriamo il problema ai valori iniziali

$$y' = -y^2, \quad y(0) = 1, \quad [a, b] = [0, 2]. \tag{1}$$

Vogliamo risolvere questo problema utilizzando un passo di lunghezza variabile: dato un intero $N > 0$, suddividiamo l'intervallo $[0, 1]$ in $2N$ intervalli uguali tra loro, e l'intervallo $[1, 2]$ in N altri intervalli ampi il doppio dei precedenti. Chiamiamo $t_0, t_1, \dots, t_{3N}$ i punti (non tutti equispaziati) che delimitano questi intervalli.

1. Per $N = 5$, dire esplicitamente quali sono i punti $[t_0, t_1, t_2, \dots, t_{15}]$.

2. Scrivere una `function [t, Y] = eulero2(N)` che risolve il problema (1) utilizzando il metodo di Eulero esplicito sulla griglia di punti *non* equispaziati qui definita: ad ogni passo l'approssimazione $y_{n+1} \approx y(t_{n+1})$ è costruita con un passo del metodo di Eulero esplicito a partire da $y_n \approx y(t_n)$. Riportare sul foglio il codice della funzione.

3. Per $N = 5, 10, 20, 40$, riportare l'errore globale $E_N = \max_{n=1,2,\dots,3N} |y_n - y(t_n)|$ tra la soluzione calcolata numericamente e quella esatta calcolabile con l'istruzione `1 ./ (1+t)`. Qual è, sperimentalmente, l'ordine di convergenza di questo metodo numerico?

Soluzioni

Esercizio 1 (15 punti)

1.
```
function v = interpolazione(n, u)

x = linspace(1, 5, n);

A = zeros(n, n);
for j = 1:n
    for i = 1:n
        A(i,j) = x(i)^(j-1);
    end
end

y = zeros(n, 1);
for i = 1:n % oppure y = 1 ./ x;
    y(i) = 1 / x(i);
end
a = A \ y;

v = 0;
for i = 1:n
    v = v + a(i) * u^(i-1);
end
```

```
>> format long
>> interpolazione(11, 3)
ans =
   0.333333333333645
>> interpolazione(11, 4)
ans =
   0.249997115551405
>> interpolazione(11, 3) - 1/3
ans =
     3.121392033733628e-13
```

Poiché $x_6 = 3$ è uno degli 11 nodi di interpolazione, $v = p(3) = 1/3$ in aritmetica esatta, quindi ci aspettiamo $v = 1/3$. Invece 4 non è un nodo di interpolazione (è compreso tra $x_8 = 3.8$, $x_9 = 4.2$), quindi la teoria non prevede che $v = p(4)$ sia uguale a $1/4$.

2.
```
>> e4 = interpolazione(4, pi) - 1/pi
e4 =
  -0.012568427238584
>> e8 = interpolazione(8, pi) - 1/pi
e8 =
    -4.392699024963198e-05
>> e12 = interpolazione(12, pi) - 1/pi
e12 =
    -1.053664008821009e-07
>> e16 = interpolazione(16, pi) - 1/pi
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccura
1.936360e-20.
> In interpolazione (line 16)

e16 =
```

```
     2.086817940671892e-10
>> e8/e4, e12/e8, e16/e12
ans =
   0.003495026817260
ans =
   0.002398671074055
ans =
  -0.001980534518785
```

Se la convergenza fosse lineare, i valori di e_{k+4}/e_k dovrebbero essere circa costanti e pari alla riduzione dell'errore attesa in 4 passi. Invece i valori calcolati sembrano decrescere, suggerendo una convergenza più veloce di quella lineare (in quanto i valori vanno a zero più velocemente).

Lo warning ottenuto indica possibili problemi numerici dovuti al cattivo condizionamento della matrice di Vandermonde, ma almeno fino ad e_{16} questi non sembrano influenzare la convergenza.

Esercizio 2 (15 punti)

1. I punti sono $[0, 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 0.9, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8.2]$.

2. Una possibile soluzione è la seguente.

```
function [t, Y] = eulero2(N)
t = zeros(1, 3*N+1);
Y = zeros(1, 3*N+1);

t(1) = 0;
Y(1) = 1;

h = 1 / (2*N);
for n = 1:2*N
    t(n+1) = t(n) + h;
    Y(n+1) = Y(n) + h * (-Y(n)^2);
end

h = 1 / N;
for n = 2*N+1:3*N
    t(n+1) = t(n) + h;
    Y(n+1) = Y(n) + h*(-Y(n)^2);
end

>> format short
>> [t, Y] = eulero2(5); E5 = max(abs(Y - 1 ./ (1+t)))
E5 =
    0.0198
>> [t, Y] = eulero2(10); E10 = max(abs(Y - 1 ./ (1+t)))
E10 =
    0.0095
>> [t, Y] = eulero2(20); E20 = max(abs(Y - 1 ./ (1+t)))
E20 =
    0.0047
>> [t, Y] = eulero2(40); E40 = max(abs(Y - 1 ./ (1+t)))
E40 =
    0.0023
>> E5/E10, E10/E20, E20/E40
ans =
    2.0810
```

```
ans =
    2.0365
ans =
    2.0178
```

I valori trovati sono vicini a 2^1, indicando ordine di convergenza 1.