Esame di Calcolo Numerico — 18 luglio 2022

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica
Tempo a disposizione: 2 ore. È consentito consultare appunti e testi (cartacei).

Esercizio 1 (15 punti) Consideriamo i due integrali

$$J = \int_0^1 (x+1)\,dx, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(y)+1)\cos(y)\,dy. \tag{1}$$

Notiamo che si ha $J = K$, come è possibile dimostrare tramite il cambio di variabile $x = \sin(y)$.

1. Scrivere una `function [I1, I2] = doppioint(f, a, b, n)` che prende in input una funzione f, gli estremi di un intervallo $[a, b]$, e un intero n, e restituisce le approssimazioni `I1` e `I2` di

   $$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

   ottenute con il metodo del punto medio composito, suddividendo $[a, b]$ rispettivamente in n sottointervalli uguali (per `I1`) e $2n$ sottointervalli uguali (per `I2`). Riportare sul foglio il codice della funzione.

2. È possibile riutilizzare nel calcolo di `I2` i valori della funzione già utilizzati per calcolare `I1`, analogamente a quanto avviene nel metodo dei trapezi composito? Motivare la risposta.

3. Riportare i quattro valori `J1, J2, K1, K2` prodotti da Matlab eseguendo la funzione `doppioint` per approssimare i due integrali in (1) con $n = 10$. Riportare inoltre il valore dello stimatore dell'errore `S = (K1 - K2) / 3`.

4. Cosa prevede la teoria riguardo i quattro errori `J1 - J, J2 - J, K1 - K, K2 - K`? A quanto dovrebbero essere uguali, o approssimativamente uguali?

Esercizio 2 (15 punti) Consideriamo il problema "test" di calcolare la soluzione $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale

$$y' = \lambda y, \quad y(a) = 1. \tag{2}$$

per un dato $\lambda \in \mathbb{C}$.

Vogliamo risolverlo utilizzando il metodo

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h\left(\frac{3}{2}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2}f(t_n, y_n)\right). \tag{3}$$

1. A che categoria di metodi appartiene il metodo (3)?

2. Scrivere una `function [t, Y] = metodo(lambda, a, b, N)` che applica il metodo (3) al problema (2), restituendo un vettore t che contiene una sequenza di tempi equispaziati $t_0, t_1, \dots, t_N$ in $[a, b]$ e una sequenza di approssimazioni $y_0, y_1, \dots, y_N$ dei valori della soluzione $y(t)$ nei tempi dati. Per calcolare il secondo valore y_1, utilizzare il metodo di Eulero esplicito (in quanto non sono disponibili sufficienti valori iniziali per utilizzare la (3)). Riportare sul foglio il codice della funzione.

3. Per il problema $y' = -0.1y$ con $[a, b] = [0, 1]$ e $N \in \{50, 100, 200\}$, riportare l'errore globale massimo $e_N = \max_{n=1,\dots,N} |y_n - y(t_n)|$ tra la soluzione numerica calcolata con il metodo (3) e quella esatta $\exp(-0.1t)$. Cosa indicano i valori ottenuti sull'ordine di convergenza di questo metodo?

4. Scrivere il polinomio di stabilità del metodo $\pi_q(z) = p_1(z) - qp_2(z)$ per $q = -2$.

Soluzioni

Esercizio 1 (15 punti)

1. Una possibile soluzione è la seguente.

```
function [I, I2] = doppioint(f, a, b, n)

I = 0;
h = (b-a) / n;
for k = 0:n-1
    I = I + f(a + h/2 + k*h);
end
I = I*h;

I2 = 0;
h = (b-a) / (2*n);
for k = 0:2*n-1
    I2 = I2 + f(a + h/2 + k*h);
end
I2 = I2*h;
```

2. No, perché i punti in cui va valutata la f per calcolare `I2`, cioè $a+\frac{1}{2}h, a+\frac{3}{2}h, \dots, a+\frac{4n-1}{2}h = b-\frac{1}{2}h$ (dove abbiamo posto $h=\frac{b-a}{2n}$) sono tutti diversi da quelli in cui va valutata per calcolare `I1`, cioè $a+h, a+3h, \dots, a+(2n-1)h$.

3.
```
>> [J1, J2] = doppioint(@(x) x+1, 0, 1, 10)
J1 =
   1.500000000000000
J2 =
   1.500000000000000
>> [K1, K2] = doppioint(@(x) (sin(x)+1)*cos(x), 0, pi/2, 10)
K1 =
   1.503090926119702
K2 =
   1.500771479268657
>> S = (K1 - K2) / 3
S =
     7.731489503483383e-04
```

4. Gli errori `J1 - J`, `J2 - J` dovrebbero essere uguali a zero (a meno di errori dovuti alle operazioni in macchina), visto che il metodo del punto medio ha un grado di precisione $m=1$, e la funzione integranda è un polinomio di grado 1. L'errore `K2 - K` dovrebbe essere approssimativamente uguale allo stimatore dell'errore `S`, per come esso è costruito a partire dalla relazione

$$K2 - K \approx \frac{1}{2^{m+1}}(K1-K) = \frac{1}{4}(K1-K).$$

Di nuovo per l'uguaglianza qui sopra, l'errore `K1 - K` dovrebbe essere approssimativamente uguale a `4S`. Notare che i valori ottenuti con Matlab verificano queste proprietà.

Esercizio 2 (15 punti)

1. È un metodo lineare a più passi esplicito. (Più precisamente, un metodo di Adams–Bashforth a 2 passi.)

2. Una soluzione possibile è la seguente.

```
function [t, Y] = metodo(lambda, a, b, N)
h = (b-a) / N;
t = a:h:b;
Y = zeros(1, N+1);
Y(1) = 1;
Y(2) = Y(1) + h*lambda*Y(1);  % Eulero
for n = 1:N-1
    Y(n+2) = Y(n+1) + h*(3/2*lambda*Y(n+1) - 1/2*lambda*Y(n));
end
```

3.

```
>> [t, Y] = metodo(-0.1, 0, 1, 50);
>> E50 = max(abs(Y - exp(-0.1*t)))
E50 =
     1.998667333080739e-06
>> [t, Y] = metodo(-0.1, 0, 1, 100);
>> E100 = max(abs(Y - exp(-0.1*t)))
E100 =
     4.998333750227957e-07
>> [t, Y] = metodo(-0.1, 0, 1, 200);
>> E200 = max(abs(Y - exp(-0.1*t)))
E200 =
     1.249791692359281e-07
>> E50/E100, E100/E200
ans =
   3.998667221830849
ans =
   3.999333473558626
```

Gli errori si riducono di un fattore 4 al raddoppiare di N; questo indica un metodo con ordine di convergenza 2.

4. Il polinomio è $\pi_q(z) = z^2 - z - q(\frac{3}{2}z - \frac{1}{2}) = z^2 + 2z - 1$.