Esame di Calcolo Numerico — 9 settembre 2022

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

Tempo a disposizione: 2 ore. È consentito consultare appunti e testi (cartacei).

Esercizio 1 (15 punti) Dati due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, consideriamo la matrice

$$M_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1 \\ a_2 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_2 \\ a_3 & 0 & \dots & 1 & 0 & b_3 \\ \vdots & & \iddots & & & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 & b_{n-1} \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 & b_n \end{bmatrix},$$

che ha gli elementi dei due vettori nella prima e ultima colonna rispettivamente, 1 in tutti gli altri elementi della *anti*-diagonale principale, e tutti gli altri elementi uguali a 0. Per esempio, quando $n = 4$

$$M_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ a_2 & 0 & 1 & b_2 \\ a_3 & 1 & 0 & b_3 \\ a_4 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare (in funzione di $\mathbf{a}, \mathbf{b}$) una matrice elementare di Gauss L tale che l'*ultima* colonna del prodotto $LM_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ sia un multiplo del primo vettore $\mathbf{e}_1$ della base canonica.

2. Per $\mathbf{a} = [4, 3, 2, 1]^T$, $\mathbf{b} = [1, 2, 3, 4]^T$, calcolare esplicitamente la matrice prodotto $P = LM_{\mathbf{a},\mathbf{b})}$.

3. Scrivere una `function c = primacolonna(a, b)` che, dati in input i vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ come sopra, restituisce in un vettore $\mathbf{c}$ gli elementi della prima colonna della matrice $P = LM_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$. Scrivere la funzione (se possibile) in modo che utilizzi $O(n)$ operazioni aritmetiche, senza costruire le matrici L e $M_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$. Riportare sul foglio il codice della funzione.

4. Qual è il vettore $\mathbf{c}$ restituito dalla funzione quando $\mathbf{a} = [4, 3, 2, 1]^T$, $\mathbf{b} = [1, 2, 3, 4]^T$ sono scelti come nel punto 2?

5. Descrivere brevemente come è possibile utilizzare un processo di sostituzioni successive per risolvere un sistema lineare del tipo $P\mathbf{x} = \mathbf{d}$ (con P come sopra e $\mathbf{x}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$) utilizzando $O(n^2)$ operazioni aritmetiche.

Esercizio 2 (15 punti) Consideriamo il problema di Cauchy

$$y' = -y^2, \quad y(0) = 1, \quad [a, b] = [0, 1], \tag{1}$$

che ha soluzione $y(t) = \frac{1}{1+t}$.

1. Scrivere l'equazione che lega y_n e y_{n+1} per il metodo di Eulero implicito applicato a (1).

2. Risolvere l'equazione nell'incognita y_{n+1}, scrivendone le due soluzioni. Se $y_n \geq 0$, quale delle due è la più vicina a y_n?

3. Scrivere una `function [t, Y] = euleroimp(N)` che applica il metodo di Eulero implicito al problema (1), restituendo un vettore t che contiene una sequenza di tempi equispaziati $t_0, t_1, \dots, t_N$ in $[a, b]$ e una sequenza di approssimazioni $y_0, y_1, \dots, y_N$ dei valori della soluzione $y(t)$ nei tempi dati. Ad ogni passo, utilizzare la soluzione più vicina a y_n come visto al punto precedente.

4. Per $N = 10, 20, 40$, riportare l'errore globale $e_N = \max_{n=1,\dots,N} |y_n - y(t_n)|$ tra la soluzione numerica calcolata con la funzione e quella esatta `1 ./ (1+t)`. Cosa indicano i valori ottenuti sull'ordine di convergenza di questo metodo?

Soluzioni

Esercizio 1 (15 punti)

1. Per avere elementi uguali a zero nell'ultima colonna (al di sotto del primo) dobbiamo scegliere una matrice elementare di Gauss $L = I - \mathbf{v}\mathbf{e}_1^T$ tale che $0 = b_k - v_k b_1$ per $k = 2, 3, \ldots, n$, quindi $v_k = \frac{b_k}{b_1}$.

2. Il prodotto è
$$LM_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3-2\cdot 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2-3\cdot 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1-4\cdot 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Più in generale, le formule che danno gli elementi nella prima colonna sono $c_k = a_k - v_k a_1 = a_k - \frac{b_k}{b_1} a_1$ (per $k = 2, 3, \ldots, n$, mentre il primo elemento rimane invariato).

3. Una possibile soluzione è la seguente.
```
function c = primacolonna(a, b)

n = length(a);

if not(length(b) == n) %controllo facoltativo
    error ('a,b␣devono␣avere␣la␣stessa␣lunghezza');
end

c = zeros(n, 1);
c(1) = a(1);
for k = 2:n
    c(k) = a(k) - b(k)/b(1) * a(1);
end
```

4. Il risultato è il seguente.
```
>> primacolonna([4,3,2,1],[1,2,3,4])
ans =
     4
    -5
   -10
   -15
```

5. Analogamente a quanto succede per le matrici triangolari superiori e inferiori, è possibile utilizzare l'equazione corrispondente all'ultima riga di P per calcolare x_1, poi la penultima riga per calcolare x_2, la terzultima per calcolare x_3, e così via, fino alla prima riga per calcolare x_n. Qusto è possibile perché l'ultima riga ha un solo elemento diverso da zero nella prima colonna (P_{n1}), e le successive hanno due elementi diversi da zero (la $n+1-k$-esima riga, cioè la k-esima riga a partire dal fondo, ha due elementi diversi da zero in posizione 1 e in posizione k).

Esercizio 2 (15 punti)

1. Si ha
$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n - hy_{n+1}^2.$$

2. L'equazione è un'equazione di secondo grado con soluzioni
$$y_{n+1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4hy_n}}{2h}.$$
Di queste, una è minore e una è maggiore di $-\frac{1}{2h}$, quindi la più vicina a $y_n \geq 0$ sarà sicuramente quella ottenuta prendendo il segno $+$.

3. Una soluzione possibile è la seguente.

```
function [t, Y] = euleroimp(N)

h = 1/N;
t = linspace(0, 1, N+1); % oppure t = 0:h:1;
Y = zeros(1, N+1);
Y(1) = 1;
for n = 1:N
    Y(n+1) = (-1 + sqrt(1 + 4*h*Y(n))) / (2*h);
end
```

4. I risultati sono i seguenti.

```
>> [t, Y] = euleroimp(10); E10 = max(abs(Y - 1./(1+t)))
E10 =
    0.0172
>> [t, Y] = euleroimp(20); E20 = max(abs(Y - 1./(1+t)))
E20 =
    0.0089
>> [t, Y] = euleroimp(40); E40 = max(abs(Y - 1./(1+t)))
E40 =
    0.0045
```

I rapporti `E10 / E20`, `E20 / E40` sono circa uguali a 2, il che indica un ordine di convergenza uguale a 1. Questo, del resto, è l'ordine di convergenza che ci si attende dal metodo di Eulero implicito.