Esercitazione 11, 30 novembre

Ingegneria dell'energia, A.A. 2021/22
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quarto foglio di esercizi

Domande di introduzione

24/11

Domanda 1 Dato $\theta \in [0; +\infty)$ si consideri la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in sé ad essa associata $\mathcal{R}(x,y) = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & - & y\sin\theta \\ x\sin\theta & + & y\cos\theta \end{pmatrix}$.

a- Si mostri che essa descrive la rotazione, in senso antiorario di un angolo di θ radianti, intorno a $(0,0)$, del punto corrispondente al vettore (x,y).
b- Che interpretazione geometrica dare nel caso in cui $\theta < 0$?
c- Si scriva la funzione da $\mathbf{R}^2$ in sé che corrisponde alla rotazione di un angolo $\frac{2}{3}\pi$ radianti in senso orario attorno all'origine.

O **Domanda 2** Dato $\theta \in (-\pi; \pi)$ si consideri la matrice $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in sé ad essa associata $\mathcal{S}(x,y) = S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & + & y\sin\theta \\ x\sin\theta & - & y\cos\theta \end{pmatrix}$.

Si mostri che essa descrive la riflessione, del punto corrispondente al vettore (x,y), rispetto alla retta che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo di $\frac{\theta}{2}$ radianti.

30/11

Domanda 3 a- Si mostri che le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineari che conservano le distanze (*isometrie*), cioè: per ogni $u, v \in \mathbf{R}^2$ si abbia $||f(u) - f(v)|| = ||u - v||$, sono tutte e sole quelle la cui matrice associata $M \in \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ è del tipo $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, con $a^2 + b^2 = 1$.
b- Si mostri che che le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineari iniettive che mantengono gli angoli (*conformi*), cioè: $\forall u, v \in \mathbf{R}^2$ si ha $\cos\left(\widehat{u0_{\mathbf{R}^2}v}\right) = \cos\left(\widehat{f(u)0_{\mathbf{R}^2}f(v)}\right)$, ovvero: $\frac{\langle f(u) \cdot f(v)\rangle}{||f(u)||\,||f(v)||} = \frac{\langle u \cdot v\rangle}{||u||\,||v||}$,

sono esattamente quelle la cui matrice associata è del tipo $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ e di rango massimo.
Il campo dei numeri complessi $\mathbf{C}$ è : sia uno spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbf{C}$ stesso, sia uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbf{R}$, di isomorfismo $\mathbf{R}$-lineare canonico con $\mathbf{R}^2$ dato da

$$c(x,y) = x + iy:$$

c- quali sono le matrici $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ a cui è associata una trasformazione $\mathbf{R}$-lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (\phi(x,y), \psi(x,y)) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, per cui $c_\circ f_\circ c^{-1} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sia $\mathbf{C}$-lineare (ovvero la moltiplicazione per un dato numero complesso) ?

Domanda 4 a- Si provi che le funzioni $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ che sono isometrie e lasciano fisso $0_{\mathbf{R}^n}$, cioè $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$, $x, y \in \mathbf{R}^n$, e $f(0_{\mathbf{R}^n}) = 0_{\mathbf{R}^n}$,
sono tutte e sole quelle che conservano il prodotto scalare, cioè $\langle f(x) \cdot f(y)\rangle = \langle x \cdot y\rangle$, $x, y \in \mathbf{R}^n$.
Teorema: le isometrie di $\mathbf{R}^n$ in sé che lasciano fissa l'origine di $\mathbf{R}^n$ sono funzioni lineari:
b- si provi nel caso $n = 2$ il teorema, cioè:

le isometrie di $\mathbf{R}^2$ che lasciano fisso $(0,0)$ sono funzioni lineari.

Domanda 5 Le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tali che: 1) $f(tu) = tf(u)$, per ogni $t \in \mathbf{R}$ e $u \in \mathbf{R}^2$, e
2) trasformano coppie di rette parallele distinte in coppie di rette parallele distinte

sono tutte e sole le trasformazioni lineari iniettive (si tenga presente la regola del parallelogramma).

$a\ b - d\ c = 1$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ab - cd = -1$

24/11 f lineare

$||f(u) - f(v)|| = ||u - v||$

$\langle u \cdot v\rangle = \frac{||u+v||^2 - ||u-v||^2}{4}$

$\Downarrow$

$\langle f(u) \cdot f(v)\rangle = \langle u \cdot v\rangle$

IN GENERALE $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare $f = (f_1, \dots, f_m)$

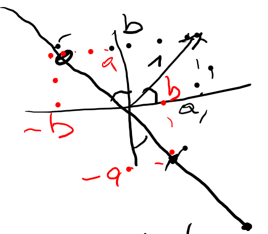
$f(x_1 \cdots x_n) = (f_1(x_1 \cdots x_n), \dots, f_m(x_1 \cdots x_n))$

$$f(\underline{x}) = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$M = \left(f(e_1) \mid f(e_2) \cdots \mid f(e_n) \right) =$$

$$\underline{x} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lineare}}}{=} x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = \left(f(e_1) \cdots f(e_n) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$



$ac + bd = 0$

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ f conserva le distanze e quindi il prodotto scalare

$$M_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \left(f(e_1) \mid f(e_2) \right)$$

$\|(a,b)\|^2 = a^2 + b^2 = \langle (a\, b) \cdot (a\, b) \rangle = \langle f(e_1) \cdot f(e_1) \rangle = \langle e_1 \cdot e_1 \rangle = 1$

$\|(c\,d)\|^2 = \dots = 1$

$\langle (a\, b) \cdot (c, d) \rangle \langle f(e_1) \cdot f(e_2) \rangle = \langle e_1 \cdot e_2 \rangle = 0$

$a^2 + b^2 = 1$ $\quad c^2 + d^2 = 1$ $\quad ac + ad = 0$

$(c\,d) = \begin{cases} -b\; a \\ b\; -a \end{cases}$

Domanda 6 a- Dati $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m$ e $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ si mostri che la funzione $f(x_1, \ldots, x_m) = \langle x \cdot a \rangle b$, da $\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{R}^n$, è lineare.
b- Si scriva la matrice, evidenziando colonne e righe, associata ad $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, denotata da $b \otimes a$.

c- Provare che la proiezione ortogonale su di un iperpiano, dato da $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, è lineare.

d- Si scriva la matrice ad essa associata in termini dei coefficienti $(a_1, \ldots, a_n) =: a \neq 0_{\mathbf{R}^n}$.

e- Dato il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito da $x + y + z + u = 0$ si mostri che la trasformazione di $\mathbf{R}^4$ in sé che che dà il simmetrico di (x, y, z, u) rispetto a tale sottospazio è lineare. Se ne scriva la matrice.

Domanda 7 (cfr. Berarducci Papini es. 4.3) Si consideri la trasformazione lineare f da $\mathbf{R}^3$ in sé che trasforma i vettori della base canonica rispettivamente in $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$ e $(10, 14, 18)$.

a- Si mostri che $f(1, 0, 0)$ ed $f(0, 1, 0)$ sono indipendenti. Quali degli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^3$ son indipendenti da $f(1, 0, 0)$ ed $f(0, 1, 0)$?

b- Si calcolino le dimensioni del nucleo e dell'immagine di tale trasformazione.

c- Si calcoli il trasformato di $(2, 2, 1)$.

Domanda 8 Si consideri la funzione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}[x]_3$, polinomi di grado minore eguale a 3, che su i vettori della base canonica vale nell'ordine rispettivamente $x^2 + 1$, $x^2 - 1$, $x^2 + x$, $x - 2$.

a- Si determinino il nucleo e l'immagine di f.

b- Considerando su $\mathbf{R}[x]_3$ la base canonica $1,\ x,\ , x^2, x^3$ si scriva la matrice associata ad f.

c- Si trovino tutte le soluzioni $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbf{R}^4$ dell'equazione $f(v) = x^2 + x + 1$.

Domanda 9 Per quali valori dei parametri $s, t \in \mathbf{R}$ la funzione lineare $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$,

$$f(x, y, z, u, v) = (xs + y + z + u + vt,\ x + ys + z - tu + v,\ x + y + zst + u + v)$$

a- è surgettiva?

b- l'immagine ha dimensione esattamente 2?

c- Se ne determini il nucleo nei vari casi.

Domanda 10 Si scriva la matrice associata alle seguenti funzioni lineari nelle basi rispettivamente specificate:

a- $T_c : \mathbf{R}[x]_5 \to \mathbf{R}[x]_5$, $c \in \mathbf{R}$, $(T(p))(x) = p(x + c)$, ove la base di $\mathbf{R}[x]_5$ è quella usuale $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5$;

b- $D : \mathbf{R}[x]_5 \to \mathbf{R}[x]_5$, $(Dp)(x) = p'(x)$, ove la base di $\mathbf{R}[x]_5$ è quella usuale $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5$;

24/11 **Domanda 10 bis** Si consideri la trasformazione lineare, da $\mathbf{R}^2$ in sé, data dalla rotazione in senso antiorario intorno all'origine di una angolo di $\frac{\pi}{4}$. Se ne scriva la matrice associata nella base $((1, 1), (2, 1))$.

Domanda 11 Si considerino r e π i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ definiti rispettivamente da $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x\ +\ 2z &= 0 \end{cases}$, $2x + y + 3z = 0$. Quali sono le funzioni $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineari per cui $L(\pi) = \{\mathbf{0}\}$ ed $L(r) = \mathbf{R}(1, 1, 1)$?

30/11 **Domanda 12** Si trovino tutte le applicazioni lineari da $\mathbf{R}^4$ in $\mathbf{R}^3$ surgettive e con nucleo eguale a $\mathbf{R}(1, 1, 1, 1)$.

Domanda 13 Si considerino in $\mathbf{R}^3$ i sottospazi H e K di equazioni rispettivamente $x + y - z = 0$ e $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

Domanda 12 Si trovino tutte le applicazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$ surgettive e con nucleo eguale a $\mathbb{R}(1,1,1,1)$.

$L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Ker} L = \mathbb{R}(1,1,1,1) \\ \operatorname{Im} L = \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} L\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\ Lx = y \text{ ha sol. per ogni } y \end{array}\right.$$

- cercare di capire come sono fatte queste matrici

$\operatorname{Ker} L = \mathbb{R}(1111)$

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad (*)\left\{\begin{array}{l} L_{11} + L_{12} + L_{13} + L_{14} = 0 \\ L_{21} + L_{22} + L_{23} + L_{24} = 0 \\ L_{31} + L_{32} + L_{33} + L_{34} = 0 \end{array}\right.$$

(v^1, v^2, v^3)

$\dim (1111)^\perp = 3$

Prendo una qualsiasi base di $(1111)^\perp$ ovvero una qualsiasi base dello spazio delle soluzioni del sistema $(*)$

$$\begin{matrix} v^1_1 & v^1_2 & v^1_3 & v^1_4 \\ v^2_1 & v^2_2 & v^2_3 & v^2_4 \\ v^3_1 & v^3_2 & v^3_3 & v^3_4 \end{matrix}$$

va bene

ESERCIZIO IMPROVVISATO

CONSIDERIAMO

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = M$$

riferito alla d.12

base KerL — base di $(\mathrm{Ker}L)^{\perp}$

• come sono tra loro i vettori colonna?

Sono ortogonali fra loro quindi sono INDIPENDENTI!

• $\mathrm{Rk}\,M = 4$

• le colonne sono una base di $\mathbb{R}^4$

* SCRIVERE LE COORDINATE DI (1000), (0100) (0010) (0001) IN TERMINI DI TALE BASE

~~def. prod. riga per col.~~

$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

coordinate nella base $M^1, M^2 M^3 M^4$

COORDINATE NELLA BASE CANONICA

$$x_1 M^1 + \dots + x_4 M^4 = \begin{matrix} x_1 M_1^1 + \dots x_4 M_1^4 = y_1 \\ x_2 M_2^1 + \dots x_4 M_2^4 = y_2 \\ \vdots \end{matrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = y_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots y_4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix} = M^{-1}(y_1 e_1 + \dots + y_4 e_4) = y_1 \underline{M^{-1} e_1} + \dots + y_4 \underline{M^{-1} e_4}$$

LE COLONNE DI M^{-1} SARANNO RISPETTIVAMENTE LE COORDINATE DI $e_1 \dots e_4$ RISPETTO AD $M^1 \dots M^4$

vogliamo risolvere i 4 sistemi

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\\v\end{pmatrix} = \begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}$$

per risolvere il primo
vuol dire
trovare $x\ y\ z\ v$

$$xM^1 + yM^2 + zM^3 + vM^4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

$\mathrm{I} - n^a \to n^a$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1
\end{array}$$

$\mathrm{II} - 2n^a \to n^a$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 4 & -1 & -1 & -2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 8 & -2 & -2 & -2 & 2
\end{array}$$

$\mathrm{III} \pm \mathrm{IV} \to 4$

facciamo le operazioni gauss per righe a ritroso per ottenere una matrice diagonale (con el. diagonali non nulli a priori perché i pivots devono essere 4)

$8\mathrm{I} + \mathrm{IV}$

$\mathrm{III} - \frac{\mathrm{IV}}{2} \to \mathrm{III}$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
8 & 8 & 0 & 0 & 6 & -2 & -2 & 2\\
0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 8 & -2 & -2 & -2 & 2
\end{array}$$

$\mathrm{I} - 4\mathrm{II}$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
8 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 2\\
0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 8 & -2 & -2 & -2 & 2
\end{array}$$

$$e_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \dots$$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4
\end{array}$$

Domanda 6 a- Dati $a=(a_1,\dots,a_m)\in\mathbf{R}^m$ e $b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbf{R}^n$ si mostri che la funzione $f(x_1,\dots,x_m)=\langle x\cdot a\rangle b$, da $\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{R}^n$, è lineare.

b- Si scriva la matrice, evidenziando colonne e righe, associata ad $f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$, denotata da $b\otimes a$.

c- Provare che la proiezione ortogonale su di un iperpiano, dato da $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$, è lineare.

d- Si scriva la matrice ad essa associata in termini dei coefficienti $(a_1,\dots,a_n)=:a\neq 0_{\mathbf{R}^n}$.

e- Dato il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito da $x+y+z+u=0$ si mostri che la trasformazione di $\mathbf{R}^4$ in sé che che dà il simmetrico di (x,y,z,u) rispetto a tale sottospazio è lineare. Se ne scriva la matrice.

a) $$f(x_1,\dots x_m)=\langle x\cdot a\rangle\cdot b=(x_1a_1+\dots+x_ma_m)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1a_1b_1+\dots+x_ma_mb_1\\ \vdots\\ x_1a_1b_n+\dots+x_ma_mb_n\end{pmatrix}$$

$f:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$

se $a\neq 0_{\mathbb{R}^m}$ $b\neq 0_{\mathbb{R}^n}$

$\mathrm{Im} f=\mathrm{span}\{b\}$

$=\mathbb{R}\cdot b$

in particolare $\dim \mathrm{Im} f=1$

usiamo le proprietà del prodotto scalare

$$f(\underline{x}+\lambda\underline{y})=\langle(\underline{x}+\lambda\underline{y})\cdot a\rangle b=(\langle x\cdot a\rangle+\lambda\langle y\cdot a\rangle)b=$$
$$=\langle x\cdot a\rangle b+\lambda\langle y\cdot a\rangle b=f(x)+\lambda f(y)$$

b) $$f(\underline{x})=x_1\begin{pmatrix}a_1b_1\\ \vdots\\ a_1b_n\end{pmatrix}+\dots+x_m\begin{pmatrix}a_mb_1\\ \vdots\\ a_mb_n\end{pmatrix}\overset{\text{def.}}{=}\underbrace{\begin{pmatrix}a_1b_1 & \dots & a_mb_1\\ \vdots & & \vdots\\ a_1b_n & \dots & a_mb_n\end{pmatrix}}_{M_{n\times m}}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$$

$$b\otimes a=\underset{n\times m}{M}=(a_1b\,|\,\dots\,|\,a_mb)$$

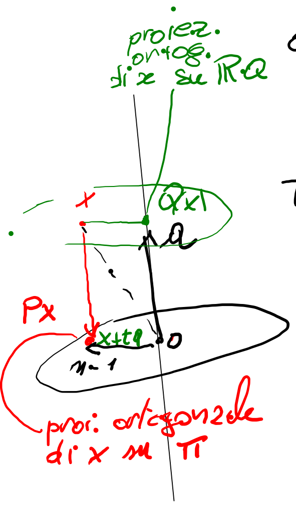
Viceversa se $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ è di rango 1, prendo $\beta\in\mathbb{R}^n$ base di $\mathrm{Im} f$, dovrà essere $f(x)=\varphi(x)\cdot\beta$ $\quad\varphi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ lineare $\varphi(x)=(\alpha_1\dots\alpha_m)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=\langle\alpha\cdot x\rangle$

$f(x)=\langle x\cdot\alpha\rangle\beta$

QUINDI LE MATRICI $n \times m$ DI RANGO 1 SONO TUTTE DEL TIPO

$$M = (a_1 b | \dots | a_m b) = \begin{pmatrix} {}^t a\, b_1 \\ \hline \vdots \\ \hline {}^t a\, b_n \end{pmatrix}$$

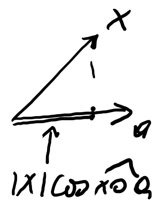
$$= (a_j b_i) \qquad M^j_i = a_j b_i$$



d) scrivere la matrice (associata nella base canonica) della proiezione ortogonale P in $\mathbb{R}^n$ sull'iperpiano π di equazione $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ $\quad (a \neq 0_{\mathbb{R}^n})$ $\quad \langle a \cdot x \rangle = 0$

$P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \mathrm{Im}\, P = \pi$

$P(x) + Q(x) = x \qquad P(x) = x - Q(x)$



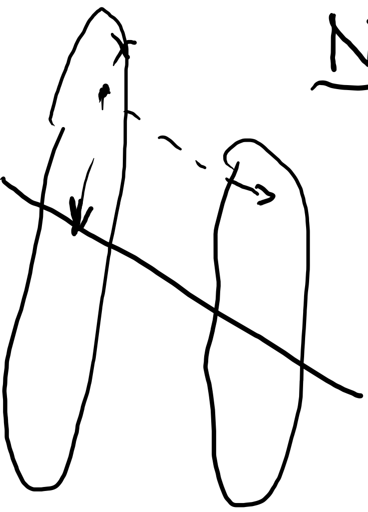
$Q(x) \overset{\text{NOTO}}{=} \langle x \cdot \frac{a}{|a|} \rangle \frac{a}{|a|} = \qquad |x||a| \cos \widehat{xoa}$

$Q(x) = \frac{a}{|a|} \otimes \frac{a}{|a|} \qquad P(x) = I\underline{x} - \frac{a}{|a|} \otimes \frac{a}{|a|} x \qquad I - \frac{a}{|a|} \otimes \frac{a}{|a|} \simeq P$

$$P^j_i = \begin{cases} -\dfrac{a_i a_j}{a_1^2 + \dots + a_n^2} & i \neq j \\[2ex] 1 - \dfrac{a_i^2}{a_1^2 + \dots + a_n^2} & i = j \end{cases} \qquad \text{se } |a|_{\mathbb{R}^n} = 1$$

$$P \simeq \begin{bmatrix} 1 - a_1^2 & & -a_i a_j \\ & \ddots & \\ -a_i a_j & & 1 - a_n^2 \end{bmatrix}$$

SIMMETRICA



NOTA

matrici notevoli di rango 1 sono gli elementi delle base canonica delle matrici $n \times m$

$$E_i^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to i \qquad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{array}$$

$$\downarrow$$

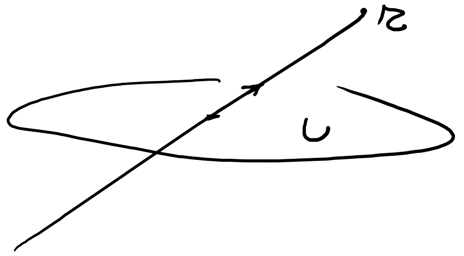
$$M = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} M_i^j E_i^j$$

$$E_i^j = e_i^{\mathbb{R}^n} \otimes e_j^{\mathbb{R}^m}$$

ARGOMENTO DI RIFLESSIONE

Una matrice di rango 1 è sempre una proiezione su una retta per l'origine? NO sono multipli di proiez.

PROIEZIONE SU r per l'origine



$\mathbb{R}^n = r \oplus U$

$\forall x \; \underline{\exists!} \; p \in r \; ; \; u \in U$ $\quad p(x), u(x)$

$x = p + u$

$p : \mathbb{R}^n \to r \qquad u : \mathbb{R}^n \to U$

1) queste funzioni sono lineari per unicità

$x + y = p(x+y) + u(x+y)$

$\underbrace{p(x)}_{r} + u(x) + p(y) + u(y) \overset{\text{UNICITÀ}}{\Longrightarrow} p(x) + p(y) = p(x+y)$

$u(x) + u(y) = u(x+y)$

p si dice proiezione su r parallela a U

u " " " U " " r

Se $\dim r = 1$ $\quad p$ è di rango 1

TUTTE LE PROIEZIONI SU RETTE PER $O_{\mathbb{R}^n}$ SONO DI RANGO 1

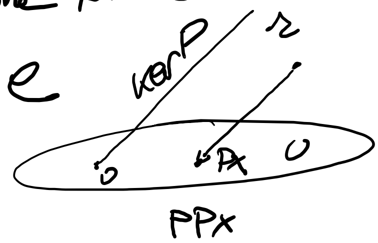
IL VICEVERSA NO moltiplico la proiezione per 5

NOTA se P è una proiezione,

$\dim r = k$

$\dim U = n - k$

$$\underline{\underline{P^2 = P}}$$



IV

DIM. 19a Viceversa se P è lineare e $P^2 \overset{*}{=} P$ allora

$\to \mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$

$y \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P$

$y = Px \underset{*}{=} P^2 x = Py = O_{\mathbb{R}^n}$

$\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P = (O_{\mathbb{R}^n})$

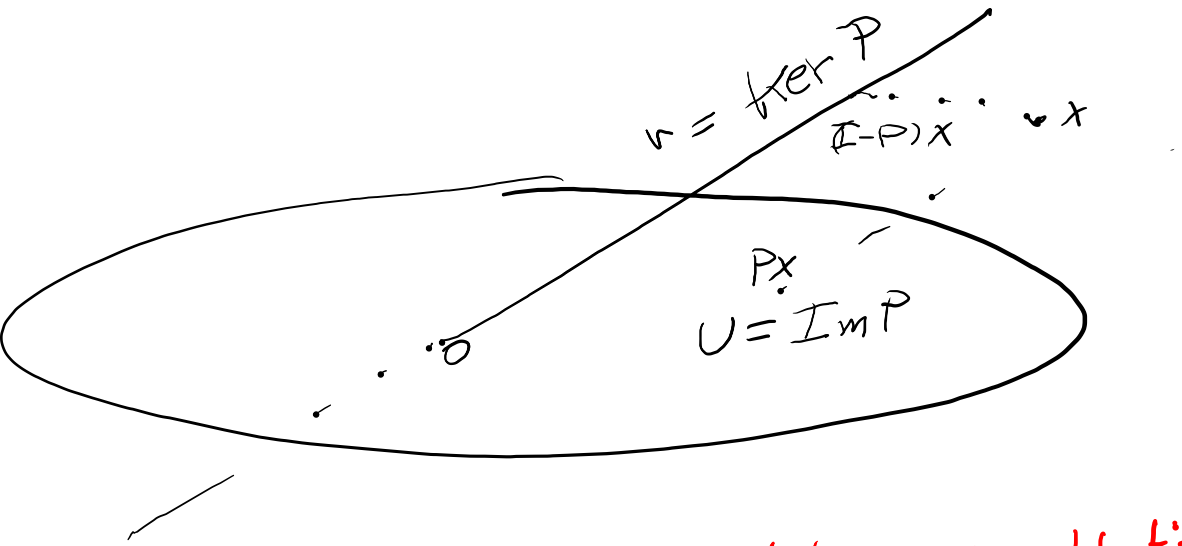
$\operatorname{Ker} P$ e $\operatorname{Im} P$ sono in somma diretta

$\dim(\operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P) \overset{\text{GRASSMANN}}{=} \dim \operatorname{Ker} P + \dim \operatorname{Im} P = \overset{\text{DIM T.}}{=} n$ ~~$- \dim K \cap I$~~

LA PROIEZIONE SU $\operatorname{Ker} P$ è $I - P$

se P lineare annulla il polinomio $\lambda^2 - \lambda$ è una proiezione

AVERE UNA PROIEZIONE (PROIEZIONI P e I-P)
VUOL DIRE AVERE UNA
DECOMPOSIZIONE
DELLO SPAZIO IN SOMMA DIRETTA
E VICEVERSA



Proi su r parallela ad U = Identità _ Proi su U par. a r sottoesercizio

ma quali matrici $n \times n$ di rango 1 sono proiezioni

$b, a \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ $b \otimes a$ $\qquad b, a \in \mathbb{R}^n$ $\qquad \underline{Lx = \langle a \cdot x \rangle b}$

se L fosse una proiezione dovrebbe essere $\underline{L^2 = L}$

$$\langle a \cdot x \rangle \cdot b = Lx = L^2 x = L(Lx) = L\langle a \cdot x \rangle \cdot b =$$
$$= \langle a \cdot x \rangle L(b) = \langle a \cdot x \rangle \langle a \cdot b \rangle b$$

$\langle a \cdot x \rangle = 0$ $\qquad$ divido per $\langle a \cdot x \rangle$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $b = \langle a \cdot b \rangle b$

$x \in \operatorname{Ker} L$ $\qquad$ $x \notin \operatorname{Ker} L$ $\qquad$ $\langle a \cdot b \rangle = 1$

Viceverso se $\langle a \cdot b \rangle = 1$

$$L^2 x = \langle a \cdot x \rangle \langle a \cdot b \rangle b = \langle a \cdot x \rangle b = Lx$$

quindi $L^2 x = Lx$

IV domanda 19.b

PENSATICI

$P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una proiezione ortogonale

(cioè $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^{\perp}$)

$$\iff \underset{\text{PROIEZIONE}}{P^2 = P} \underset{\text{ORTOGONALE}}{= {}^tP}$$

a- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(H) = 0$ e $f(\mathbf{R}^3) = K$.

b- Dire se esiste $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g \circ f = 0$ dove f è una applicazione lineare verificante le ipotesi del punto precedente.

c- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g(K) \subset H$ e $g(H) \subset K$.

Domanda 14 Sia V lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4.
Si consideri lo spazio H generato dai polinomi $1, 1+x, 1+x+x^2$ e lo spazio K quello generato dai polinomi $1+x+x^2, 1+x+x^3, 1+x^4$.
a- Dopo aver identificato V con $\mathbf{R}^5$ tramite una base di V, scrivere le equazioni dell'intersezione $H \cap K$ e della somma $H + K$.
b- Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $T : V \to V$ tale che $T(H) = K$ e $T(K) = H \cap K$ e scriverne la matrice associata

Domanda 15 Denotando con ${}^te_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, {}^te_n = (0, \ldots, 1)$ le righe corrispondenti alla base canonica di $\mathbf{R}^n$, e data M matrice $n \times k$, a quali matrici rispettivamente corrispondono i prodotti righe per colonne seguenti: $\begin{pmatrix} {}^te_1 \\ \vdots \\ {}^te_{i-1} \\ {}^te_i + \mu\, {}^te_j \\ {}^te_{i+1} \\ \vdots \\ {}^te_n \end{pmatrix} M, \qquad \begin{pmatrix} \vdots \\ i^o\ {}^te_j \\ \ldots \\ j^o\ {}^te_i \\ \vdots \end{pmatrix} M?$

Domanda 16 Costruire se possibile, nei vari casi, un'applicazione lineare con le proprietà richieste, e scrivere la matrice associata nelle basi, di dominio e codominio, eventualmente specificate:
a- $\phi : \mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, per cui se $rank A < n$ si abbia $\phi(A) = 0$, e $\phi(Id_{n\times n}) = 1$: base dominio $e_i^{\mathbf{R}^n} \otimes e_j^{\mathbf{R}^n}$ ove $e_I^{\mathbf{R}^n}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$, base codominio 2;
b- $\phi : \mathbf{R}[x]_n \to \mathbf{R}[x]_{n-1}$, $n \geq 1$, $\mathbf{R}[x]_m$ polinomi di grado minore eguale a m, per cui
$\phi(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \cdots + x^2 + 1) = x^{2k}$, $0 \leq 2k \leq n$,
$\phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + x^{2k-3} + \cdots + x$, $1 \leq 2k-1 \leq n$: basi di dominio e codominio quelle canoniche;
c- $\phi : U \to U$, $U = U_1 \oplus U_2$, per cui $\phi(U_1) = U_2$ e $\phi(U_2) = U_1$.

Domanda 17 a1- (Forma canonica di Nord-Est) Sia $L : U \to V$ e lineare, $dim\, U = n$, $dim\, V = m$.
LEZIONE
Trovare le basi di U e V per cui la matrice associata ad L in tali basi sia $\begin{pmatrix} O_{r\times(n-r)} & Id_{r\times r} \\ O_{(m-r)\times(n-r)} & O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}$.
Chi è r?
a2- Sia $M \in \mathcal{M}(m, n)$, trovare le matrci invertibili $\Sigma \in \mathcal{M}(m, M)$, $S \in \mathcal{M}(n, n)$ per cui $\Sigma M S = \begin{pmatrix} O_{r\times(n-r)} & Id_{r\times r} \\ O_{(m-r)\times(n-r)} & O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}$.
LEZIONE
30/11 LEZIONE
a3- Due matrici $M, N \in m \times n$ hanno lo stesso rango se e solo se $N = \Sigma M S$ con Σ ed S invertibili.
b1- Sia $L : U \to V$ lineare, $dim\, U = n$, $dim\, V = m$, $r =: rango\, L < m, n$. Determinare due funzioni lineari $f : U \to U$, $g : V \to V$ di rango rispettivamente $\underline{n-r}$ e d $\underline{m-r}$ per cui $L \circ f(u) = 0_V = g \circ L(u)$ per ogni $u \in U$.
b-2 Sia $M \in \mathcal{M}(m, n)$ non invertibile, cioè di rango non massimo, mostrare che è un divisore destro e sinistro, rispetto al prodotto di matrici, della matrice nulla: vi sono due matrici non nulle $A \in \mathcal{M}(n, n)$ e $B \in \mathcal{M}(m, m)$ per cui $MA = 0_{\mathcal{M}(m,n)} = BM$. entrambe

Domanda 17 bis a- Se una matrice quadrata M è *simile* alla matrice identica ($Id = S^{-1} M S$) allora è *uguale* alla matrice identica.
b- Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.

17 b1

$L : U_n \to V_m$

$\dim U = n \quad \dim V = m$

$\dim \mathrm{Im} L = \text{rango}\, L = \underline{r < n, m}$ $*$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "L"] \arrow[dr, "g \circ L"] & V_m \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "L \circ f"'] & V_m \end{tikzcd}$$

TROVARE
$g : V \to V$
$f : U \to U$
end

$\mathrm{rg} f \underline{= n - r} \neq 0 \quad \underline{\mathrm{rg}\, g = m - r} \neq 0$
$\mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f \quad \mathrm{rg}\, g = \dim \mathrm{Im}\, g$

$g \circ L = 0_{U \to V} = L \circ f$

$U_n \xrightarrow{L} \mathrm{Im} L \subset V$

come si trova f

rango $L < n$
$n = \text{rango} L + ?$
$n = \dim \mathrm{Im} L + \dim \mathrm{Ker} L$

quindi $*$
$\mathrm{Ker} L \neq (0)$
$\Downarrow$
$U = \mathrm{Ker} L \oplus A$
$f : \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} L \quad f|_A = 0$
ULTIMARE A CASA g e b2