Esercitazione 12, 7 dicembre

FOGLIO IV

a- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(H) = 0$ e $f(\mathbf{R}^3) = K$.

b- Dire se esiste $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g \circ f = 0$ dove f è una applicazione lineare verificante le ipotesi del punto precedente.

c- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g(K) \subset H$ e $g(H) \subset K$.

Domanda 14 Sia V lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4.
Si consideri lo spazio H generato dai polinomi $1, 1+x, 1+x+x^2$ e lo spazio K quello generato dai polinomi $1+x+x^2, 1+x+x^3, 1+x^4$.
a- Dopo aver identificato V con $\mathbf{R}^5$ tramite una base di V, scrivere le equazioni dell'intersezione $H \cap K$ e della somma $H + K$.
b- Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $T : V \to V$ tale che $T(H) = K$ e $T(K) = H \cap K$ e scriverne la matrice associata

Domanda 15 Denotando con ${}^te_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, {}^te_n = (0, \ldots, 1)$ le righe corrispondenti alla base canonica di $\mathbf{R}^n$, e data M matrice $n \times k$, a quali matrici rispettivamente corrispondono i prodotti righe per colonne seguenti:
$$\begin{pmatrix} {}^te_1 \\ \vdots \\ {}^te_{i-1} \\ {}^te_i + \mu\, {}^te_j \\ {}^te_{i+1} \\ \vdots \\ {}^te_n \end{pmatrix} M, \qquad \begin{pmatrix} \vdots \\ i^o\ {}^te_j \\ \ldots \\ j^o\ {}^te_i \\ \vdots \end{pmatrix} M?$$

Domanda 16 Costruire se possibile, nei vari casi, un'applicazione lineare con le proprietà richieste, e scrivere la matrice associata nelle basi, di dominio e codominio, eventualmente specificate:
a- $\phi : \mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, per cui se $rank A < n$ si abbia $\phi(A) = 0$, e $\phi(Id_{n\times n}) = 1$: base dominio $e_i^{\mathbf{R}^n} \otimes e_j^{\mathbf{R}^n}$ ove $e_I^{\mathbf{R}^n}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$, base codominio 2;
b- $\phi : \mathbf{R}[x]_n \to \mathbf{R}[x]_{n-1}$, $n \geq 1$, $\mathbf{R}[x]_m$ polinomi di grado minore eguale a m, per cui
$\phi(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \cdots + x^2 + 1) = x^{2k}$, $0 \leq 2k \leq n$,
$\phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + x^{2k-3} + \cdots + x$, $1 \leq 2k-1 \leq n$: basi di dominio e codominio quelle canoniche;
c- $\phi : U \to U$, $U = U_1 \oplus U_2$, per cui $\phi(U_1) = U_2$ e $\phi(U_2) = U_1$.

Domanda 17 a1- (Forma canonica di Nord-Est) Sia $L : U \to V$ e lineare, $dim\, U = n$, $dim\, V = m$.
LEZIONE
Trovare le basi di U e V per cui la matrice associata ad L in tali basi sia $\begin{pmatrix} O_{r\times(n-r)} & Id_{r\times r} \\ O_{(m-r)\times(n-r)} & O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}$.
Chi è r?
LEZIONE
a2- Sia $M \in \mathcal{M}(m, n)$, trovare le matrci invertibili $\Sigma \in \mathcal{M}(m, M)$, $S \in \mathcal{M}(n, n)$ per cui $\Sigma M S = \begin{pmatrix} O_{r\times(n-r)} & Id_{r\times r} \\ O_{(m-r)\times(n-r)} & O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}$.
LEZIONE
a3- Due matrici $M, N \in m \times n$ hanno lo stesso rango se e solo se $N = \Sigma M S$ con Σ ed S invertibili.
30/11
b1- Sia $L : U \to V$ lineare, $dim\, U = n$, $dim\, V = m$, $r =: rango\, L < m, n$. Determinare due funzioni lineari $f : U \to U$, $g : V \to V$ di rango rispettivamente $n - r$ e d $m - r$ per cui $L \circ f(u) = 0_V = g \circ L(u)$ per ogni $u \in U$.
b-2 Sia $M \in \mathcal{M}(m, n)$ non invertibile, cioè di rango non massimo, mostrare che è un divisore destro e sinistro, rispetto al prodotto di matrici, della matrice nulla: vi sono due matrici non nulle $A \in \mathcal{M}(n, n)$ e $B \in \mathcal{M}(m, m)$ per cui $MA = 0_{\mathcal{M}(m,n)} = BM$.
entrambe

Domanda 17 bis a- Se una matrice quadrata M è *simile* alla matrice identica ($Id = S^{-1} M S$) allora è *uguale* alla matrice identica.
b- Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.

17 b1 30/11

$L : U_n \to V_m$
$\dim U = n$ $\dim V = m$ → L non è iniettiva, L non surg.
$\dim \mathrm{Im} L = \text{rango} L = r < n, m$ *

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{L} & V_m \\ \uparrow f & & \downarrow g \\ U & \xrightarrow{L\circ f \quad g\circ L} & V_m \end{array}$$

TROVARE
$g : V \to V$
$f : U \to U$
f end
$\text{rg} f = n - r$ → $\dim \mathrm{Ker} L$
$\text{rg}\, g = m - r$ → $m - \text{rk} L$
$= \dim \mathrm{Im} f$ $= \dim \mathrm{Im}\, g$

$g \circ L = 0_{U \to V} = L \circ f$

$U_n \xrightarrow{L} \mathrm{Im} L \subset V$

come si trova f rango $L < n$
$n = \text{rango} L + ?$
$n = \dim \mathrm{Im} L + \dim \mathrm{Ker} L$

quindi *
$\mathrm{Ker} L \neq (0)$
$\Downarrow$
$U = \mathrm{Ker} L \oplus W$
$f : \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} L$ $f|_W = 0$
ULTIMARE A CASA g e b_2

7/12 $V = \mathrm{Im} L \oplus Z$ vi
$g|_{\mathrm{Im} L} \equiv 0$ $g|_Z = \mathrm{id}_Z$
$v \in V$ $v = Ly + z$
$g(v) = g(Ly) + g(z)$
$= 0 + z$

d 17. b2
$M : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$
rank $M = r$
se $r < n$ e di m
prendo
$L \to M$
$f \to A$
$g \to B$

$f|_{\mathrm{Ker} L}$ $A|_{\mathrm{Ker} M} = \mathrm{id}_{\mathrm{Ker} M}$
$A|_W \equiv 0$

$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker} M \oplus W$
base $k_1 \ldots k_{n-r}$ base $w_1 \ldots w_r$
$k_1 \ldots k_{n-r}, w_1 \ldots w_r$ è base di $\mathbb{K}^n$
la chiamo $\mathcal{B}$
la mia matrice A è simile alla matrice

$$A = N \begin{bmatrix} I_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} N^{-1}, \qquad \begin{array}{c} \\ n-r \\ r \end{array}\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & O \\ \hline O & O \end{array}\right] = N^{-1} A N^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$$
base canonica

$k \in \mathrm{Ker} L$ le sue coordinate in $\mathcal{B}$ sono del tipo
$$\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Big] n-r \\ \big] r \end{array}$$

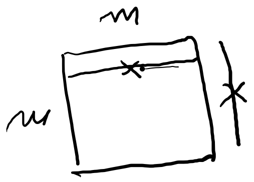
$w \in W$ le sue coordinate in $\mathcal{B}$ saranno
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ * \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Big] n-r \\ \big] r \end{array} \quad \left[\begin{array}{c|c} Id_{n-r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} Id_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio per casa

$\underset{n\times k}{\Sigma} \cdot \underset{k\times m}{\Theta}$ 1) costruire un'opportuna base di $\mathbb{K}^m$ suggerimento $\mathbb{K}^m = \operatorname{Im} M \oplus Z$

$m_1 \dots m_r \qquad z_1 \dots z_{m-r}$

in cui la g cercata è di tipo $\longrightarrow \begin{bmatrix} O_{r\times r} & O \\ O & I_{d\, m-r \times m-r} \end{bmatrix}$



$\underset{m\times m}{B}\,\underset{m\times n}{M} = O_{m\times n}$

2) cosa succede?

2.1 $r<n$ ma non di m?

2.2 $r<m$ ma non di n?

FOGLIO V **Domanda 5** Siano U, uno spazio vettoriale di dimensione finita n su K, ed $f : U \to U$ un endomorfismo lineare di U in sé . Si provi che:

la matrice associata ad f è la stessa in ogni base di U
se e solo se
f è un multiplo dell'identità su U

i.e. vi è $\lambda \in K$ per cui $f(u) = \lambda u$, per ogni $u \in U$.

[Può esser utile fissare una base di U e considerare quelle da lei ottenuta cambiando segno ad un suo elemento e quindi permutando i suoi elementi.]

FOGLIO IV bis **Domanda 7** (cfr. domanda 5 del quinto foglio) Quali sono le matrici $M \in \mathcal{M}(n)$ per cui
a- per ogni $N \in \mathcal{M}(n)$ invertibile si abbia $M = NMN^{-1}$? moltiplico a dx per N $MN = NM$
b- per ogni altra $N \in \mathcal{M}(n)$ si abbia $NM = MN$?

(sugg. trovare delle matrici che sicuramente soddisfano la condizione in b-. Quindi per rispondere ad a- fare opportuni cambiamenti di base).

① riduciamo le domande V 5 a quella IV bis 7

1.1 $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ basi di U
$\mathcal{B} = (b_1 \cdots b_n)$
$\mathcal{C} = (c_1 \cdots c_n)$
$\varphi_{\mathcal{B}}(b_i) = e_i^{\mathbb{R}^n}$
$\varphi_{\mathcal{C}}(c_i) = e_i^{\mathbb{R}^n}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rrr, "M_{\mathcal{B}}"] & & & \mathbb{R}^n \\
& U \arrow[ul, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\varphi_{\mathcal{C}}"'] & U \arrow[ur, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "\varphi_{\mathcal{C}}"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[rrr, "M_{\mathcal{C}\mathcal{C}}"'] \arrow[uu, "\varphi_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}"] \arrow[ur, "\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}"'] & & & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$M_{\mathcal{B}} = \varphi_{\mathcal{B}} f \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$

$M_{\mathcal{C}} = \varphi_{\mathcal{C}} f \varphi_{\mathcal{C}}^{-1}$

(*) $\varphi_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}$ che cambiamento di coordinate in $\mathbb{R}^n$ rappresenta?

(*) DALLE COORDINATE NELLA BASE $\mathcal{C}$ ALLE COOR. NELLA BASE CAN.
$\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}(e_i) = c_i = \sum_j \lambda_j^i b_j$
$\varphi_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}(e_i) = (\lambda_1^i, \ldots, \lambda_n^i)$

DUE MATRICI SONO SIMILI SE SOLO SE SONO ASSOCIATE IN BASI DIVERSE AD UNO STESSO ENDOMOR.

$$M_{\mathcal{C}} = \varphi_{\mathcal{C}} f \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} = \underbrace{\varphi_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}}_{=(\varphi_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{C}}^{-1})^{-1}} \varphi_{\mathcal{B}} f \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \underbrace{\varphi_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}}_{N} = N^{-1} M_{\mathcal{B}} N$$

$(HK)^{-1} =$
$= K^{-1}H^{-1}$
$HKK^{-1}H^{-1} =$
$H\, Id\, H^{-1} =$
$= HH^{-1} = Id$

1.2 $M_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{B}} \longrightarrow M_{\mathcal{C}} = N^{-1} M_{\mathcal{B}} N \longleftarrow$ vero in generale

ipotesi della domanda 5

$M_{\mathcal{B}} = N^{-1} M_{\mathcal{B}} N \quad \forall N$ invertibile.

$\longrightarrow$ ipotesi domanda 7

• Inoltre se $M_{\mathcal{B}f} = \lambda Id$ allora f è l'identità di U:

$\lambda Id_{n \times n} = \varphi_{\mathcal{B}} f \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ $\qquad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \lambda Id\, \varphi_{\mathcal{B}} = f$

$\parallel$

$\lambda\, id$

NOTA

se $N_{n\times n}$ è invertibile

ENDOMORFISMO BIGETTIVO

N: MATRICE CHE DALLE COORDINATE NELLA BASE $\mathcal{N}$ DATA DALLE SUE COLONNE $N^1, \dots, N^n$ DÁ LE COORDINATE NELLA BASE CANONICA

infatti N^i nella base $\mathcal{N}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to i \quad e_i$

$$N e_i = N^i$$

Domanda 7 (cfr. domanda 5 del quinto foglio) Quali sono le matrici $M \in \mathcal{M}(n)$ per cui

a- per ogni $N \in \mathcal{M}(n)$ invertibile si abbia $M = NMN^{-1}$?

b- per ogni altra $N \in \mathcal{M}(n)$ si abbia $NM = MN$?

(sugg. trovare delle matrici che sicuramente soddisfano la condizione in b-. Quindi per rispondere ad a- fare opportuni cambiamenti di base).

- $Id \cdot N = N = N \cdot Id$ $\quad \lambda Id \cdot N = \lambda N \cdot Id = N \cdot \lambda Id$

  $0N = 0 = 0N$

  λId COMMUTA CON TUTTE LE MATRICI

- VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE

  se $M : \forall N \; MN = NM$ allora $M = \lambda Id$

basta dimostrare $\forall N$ invert. $MN = NM$ allora $M = \lambda Id$

" $\quad \forall N \; N^{-1}MN = M$ " "

M rappresenta se stessa nella base canonica

cambiamo base $-e_i$ invece di e_i e gli altri rimangono gli stessi

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

da base $(e_1, \dots, -e_i, \dots e_n)$ $\downarrow$ a base canonica

$\uparrow$ i colonne

$S^{-1} = S$

$$M \overset{\text{IPOTESI}}{=} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \left[M\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots M\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots M\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \ddots & & 0 \\ & & -1 & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \left[M^1 \cdots -M^i \cdots M^n \right]$$

$$M^j_i = (0 \cdots -1 \cdots 0)\, M^j =$$

$$\underset{i^\circ}{=} (0 \cdots -1\; 0 \cdots 0) \begin{pmatrix} M^j_1 \\ \vdots \\ M^j_n \end{pmatrix} \overset{\text{se } j \neq i}{=} -M^j_i$$

se $i \neq j$ $\quad M^j_i = 0$

cioè M è diagonale $\begin{pmatrix} M^1_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M^n_n \end{pmatrix}$

Prendiamo la base data

da $e_i \dots e_{i-1}\ e_1\ e_{i+1} \dots e_n$:

la matrice che trasforma

le coordinate in tale base nelle coordinate nella base canonica

è :

$$\begin{array}{cc} & \quad i^\circ \\ i^\circ \rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & & & 1 & & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & 0 \\ 1 & & & 1 & & \\ \vdots & & & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array} S$$

$$S = {}^tS = S^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ 1 & & & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \\ \vdots & & 0 \\ 1 & & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

In generale per il prodotto di matrici

$Z = X \cdot Y$

$Z^j_i = X_i \cdot Y^j$

$Z^j = X Y^j$

$Z_i = X_i Y$

$$\begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{pmatrix} e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad j \neq i$$

$$M^1_1 = \boxed{m_1} = (S^{-1}MS)^1_1 =$$

$$= (S^{-1})_1 (MS)^1 =$$

PRIMA RIGA di S^{-1}

PRIMA COLON DI MS

$$= (0 \dots \overset{i^o \text{posto}}{1} 0 \dots) MS^1 = (0 \dots \overset{i^o}{1} 0 \dots) M \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} i^o \text{posto}$$

$$= (0 \dots \overset{i^o}{1} 0 \dots) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} i^o = \boxed{m_i}$$

quindi essendo i arbitrario

$$M = m_1 \mathrm{Id}$$