27 ottobre 2022, V esercitazione

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Secondo foglio di esercizi
Domande di introduzione

Domanda 1 a- Mostrare con un esempio che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^5$ posson essere "sghembi", ovvero avere intersezione vuota ma con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0,0)$, che si intersecano solo in $(0,0,0,0,0)$.
Si assuma che dati quattro elementi di $\mathbf{R}^4$ linearmente indipendenti, ogni altro elemento di $\mathbf{R}^4$ si scrive come somma di loro multipli reali.
b- Si mostri quindi che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^4$ con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0)$, che si intersecano solo in $(0,0,0,0)$, si intersecano in almeno un punto.
c- Si mostri quindi che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^4$ con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0)$ con intersezione non solo $\{(0,0,0,0)\}$, possono aver intersezione vuota.

Domanda 2 Trovare la proiezione ortogonale di $(1,2,3,4,5)$ sulla retta $t(1,1,2,1,3),\ t \in \mathbf{R}$.

Domanda 3 a- Mostrare che le soluzioni del sistema nelle variabili $(x,y,z,u,v) \in \mathbf{R}^5$ determinano un piano bidimensioanle $\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases}$
b- Descrivere in forma parametrica tale piano bidimensionale.

Domanda 4 a- Trovare delle equazioni cartesiane che determinino l'ortogonale del piano bidimensionale di $\mathbf{R}^5$ definito da $\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases}$
b- Descrivere in forma parametrica tale ortogonale.

Domanda 5 Trovare la proiezione ortogonale di $(1,2,3,4,5)$ sul piano bidimensionale di $\mathbf{R}^5$ definito da $\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases}$.

Domanda 6 Calcolare la distanza di $(1,2,3,4,5)$ dal piano bidimensionale di $\mathbf{R}^5$ definito da
$\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases}$.

Domanda 7 Calcolare la distanza di $(1,2,3,4,5)$ dal piano bidimensionale di $\mathbf{R}^5$ dato in forma parametrica da $s(1,1,1,0,1) + t(1,0,1,1,1),\ t,\ s \in \mathbf{R}$.

Domanda 8 Determinare la proiezione ortogonale della retta in $\mathbf{R}^4$ data in forma parametrica $t(1,1,1,1)$, $t \in \mathbf{R}$ sul piano bidimensionale in $\mathbf{R}^4$ definto da $\begin{cases} x - y + z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases}$.

Domanda 9a- Verificare che le equazioni $\begin{cases} x + 2y + 2z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \\ x - y - z + u = 0 \end{cases}$, $(x,y,z,u) \in \mathbf{R}^4$,

individuano una retta in $\mathbf{R}^4$.

b- Nel caso trovare delle equazioni per la sua proiezione ortogonale sul piano bidimensionale in $\mathbf{R}^4$ definto da $\begin{cases} x - y + z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases}$.

Domanda 10 Determinare la proiezione ortogonale della retta di $\mathbf{R}^4$ individuata da
$\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ x - y + z + 2u = 1 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases}$, sul piano definto da $\begin{cases} x - y + z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases}$.

Domanda 1 a- Mostrare con un esempio che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^5$ posson essere "sghembi", ovvero avere intersezione vuota ma con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0,0)$, che si intersecano solo in $(0,0,0,0,0)$.

Si assuma che dati quattro elementi di $\mathbf{R}^4$ linearmente indipendenti, ogni altro elemento di $\mathbf{R}^4$ si scrive come somma di loro multipli reali.

b- Si mostri quindi che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^4$ con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0)$, che si intersecano solo in $(0,0,0,0)$, si intersecano in almeno un punto.

c- Si mostri quindi che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^4$ con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0)$ con intersezione non solo $\{(0,0,0,0)\}$, possono aver intersezione vuota.

1) STRUTTURA LINEARE DI $\mathbb{R}^n$

rette $P+tv$ $\quad v\neq 0_{\mathbb{R}^n}$, $\quad P+t_1v^{(1)}+\dots+t_Kv^{(K)}$ $\quad v^{(1)}\dots v^{(K)}\in\mathbb{R}^n$ lin. indip.

2) STRUTTURA METRICA

$|v|_{\mathbb{R}^n}=\sqrt{v_1^2+\dots+v_n^2}$ $\quad L(t_1\dots t_K)\in\mathbb{R}^n$ $\quad v=(v_1\dots v_n)$ $\quad d_{\mathbb{R}^n}(v,w)=|v-w|_{\mathbb{R}^n}$

$\langle v\cdot w\rangle = v_1w_1+\dots+v_nw_n$

D.1 a) $\pi^{(1)}=\{P^{(1)}+sv^{(1)}+tv^{(2)}\}$ $\quad v^{(1)}v^{(2)}$ indipendenti $\quad P_i^{(1)}+sv_i^{(1)}+tv_i^{(2)}$

$\pi^{(2)}=\{P^{(2)}+\sigma w^{(1)}+\tau w^{(2)}\}$ $\quad w^{(1)}w^{(2)}$ " $\quad 1\leq i\leq n$

$\pi^{(1)}\cap\pi^{(2)}=\emptyset$ $\quad g_{\pi^{(1)}}\cap g_{\pi^{(2)}}=\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. In $\mathbb{R}^n$ se $\langle v\cdot w\rangle=0_{\mathbb{R}}$ $v\neq 0\neq w \Rightarrow v\,w$ indip.

QUINDI SI CERCA UN ESEMPIO USANDO LA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^5$: $\overset{e_1}{(10000)}, \overset{e_2}{(01000)}, \overset{e_3}{(00100)}$

$\overset{e_4}{(00010)}, \overset{e_5}{(00001)}$ $\quad (x_1x_2x_3x_4x_5)=x_1(10000)+x_2(01000)+x_3(00100)+\dots$

$g_{\pi^{(1)}}=$
$=\pi^{(1)}=\{s(10000)+t(01000):(s,t)\in\mathbb{R}^2\}$ $\quad se_1+te_2=\sigma e_3+\tau e_4$

$g_{\pi^{(2)}}=\{\sigma(00100)+\tau(00010):(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}^2\}$ $\quad se_1+te_2-\sigma e_3-\tau e_4=0_{\mathbb{R}^5}$

$s=t=\tau=\sigma=0_{\mathbb{R}}$ $\quad g_{\pi_1}\cap g_{\pi_2}=\{0_{\mathbb{R}^5}\}$

$$\pi^{(1)} = \{ s e_1 + t e_2 : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \} = \{ (s,t,0,0,0) : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \}$$

TROVARE $\mathbb{R}^5 \ni P^{(2)}$

$$\pi^{(2)} = \{ \sigma e_3 + \tau e_4 + P^{(2)} : (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2 \} = \{ (0\,0\,\sigma\,\tau\,0) : \sigma\,\tau \}$$

TROVARE $P^{(2)}$ in modo che

$$\pi^{(1)} \cap \pi^{(2)} = \emptyset$$ cioè

$$\forall s, t, \sigma, \tau$$

$$s e_1 + t e_2 \neq \sigma e_3 + \tau e_4 + P^{(2)}$$

$$P^{(2)} \notin \pi^{(1)} = g\pi^{(1)} \qquad P^{(2)} \notin g\pi^{(2)}$$

$$\rightarrow P^{(2)} \notin \{ (s,t,\sigma,\tau,0) : (s,t,\sigma,\tau) \in \mathbb{R}^4 \}$$

per esempio $P^{(2)} = e_5 = (0\,0\,0\,0\,1)$

$$s e_1 + t e_2 = \sigma e_3 + \tau e_4 + \lambda e_5$$

$$s e_1 + t e_2 - \sigma e_3 - \tau e_4 - \lambda e_5 = 0_{\mathbb{R}^5}$$

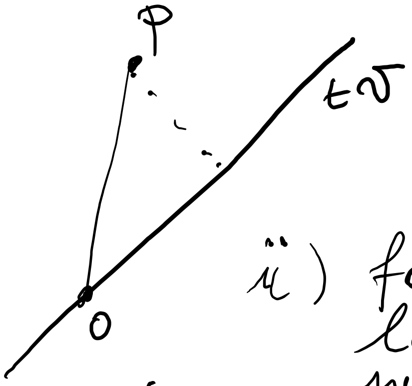
ESERCIZIO LASCIATO

Riflettere su D1 b) D2 c)

e poi venire a ricevimento.

Domanda 2 Trovare la proiezione ortogonale di $(1,2,3,4,5)$ sulla retta $t(1,1,2,1,3)$, $t \in \mathbb{R}$.

$\underline{P}$ $\qquad$ $t\underline{v}$



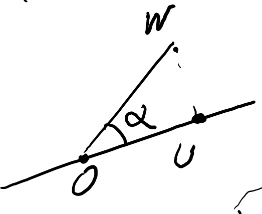
i) P sta sulla retta?

$\exists\, t \in \mathbb{R} \quad P = tv$?

ii) facciamo la proi. ort. sulla retta

$$\begin{cases} 1 = t \\ 2 = t \\ 3 = 2t \\ 4 = t \\ 5 = 3t \end{cases}$$ ha soluz.?

NO



$\langle w \cdot u \rangle = |w|\,|u| \cos\alpha$

$P^{\perp}_{ut}(w) = |w| \cos\alpha \cdot \dfrac{u}{|u|}$

$\qquad = \left\langle w \cdot \dfrac{u}{|u|} \right\rangle \cdot \dfrac{u}{|u|}$

$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$

$$\langle (1\,2\,3\,4\,5) \cdot (1\,1\,2\,1\,3) \rangle \frac{\cdot (1\,1\,2\,1\,3)}{1+1+4+1+9} =$$

$$= \frac{1+2+6+4+15}{1+1+4+1+9} (1\,1\,2\,1\,3)$$

$$= \frac{28}{16} (1\,1\,2\,1\,3) = \frac{7}{4} (1\,1\,2\,1\,3).$$

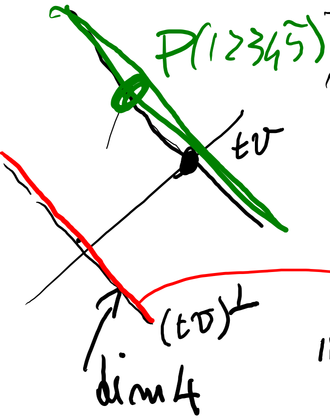
Esercizio in più

la retta $t(1\,1\,2\,1\,3)$

che equazioni ha ?

ELIMINAZIONE PARAMETRO

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \\ u = t \\ v = 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x = u \\ 2x = z \\ 3x = v \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - u = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 3x - v = 0 \end{cases}$$



Altro sol. domanda 2

$\underline{t(1,1,2,1,3)} \to v$ il suo ortogonale

$$\{u \in \mathbb{R}^5 : \langle u, v \rangle = 0_{\mathbb{R}}\} = \{(xyzab) : x+y+2z+a+3b=0\}$$

$x+y+2z+a+3b=0$

$x+y+2z+a+3b = 1+2+6+4+15$

$x+y+2z+a+3b = 28$

INTERS con retta $\quad a \quad 3b$

$t + t + 4t + t + 9t = 28 \qquad t = 28/16$

Domanda 3 a- Mostrare che le soluzioni del sistema nelle variabili $(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5$ determinano un piano bidimensioanle
$$\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases}$$
b- Descrivere in forma parametrica tale piano bidimensionale.

a) basta vedere che la forma ridotta ha 3 pivot quindi due soli parametri descriverebbero l'insieme delle soluzioni

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)
\qquad
\begin{array}{c} \\ II-I \\ I-III \end{array}
\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

$(x\ y\ z\ u\ v)$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \longrightarrow v = u$$

$$\underbrace{5}_{\text{numero variabili}} - \underbrace{3}_{\text{numero pivot}} = 2$$

$$\begin{array}{ccccc|c} x & y & z & u & v & \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x + y + 3z + u + 4v = 0$$

$$4z + 2v = 0 \longrightarrow z = -v/2$$

$$-u + v = 0 \longrightarrow u = v$$

$$x + y - \frac{3}{2}v + v + 4v = 0$$

$$x = -y - \frac{7}{2}v$$

$$\left(-y - \frac{7}{2}v,\ y,\ -\frac{v}{2},\ v,\ v\right) =$$

$$y(-1, 1, 0, 0, 0) + t(-7, 0, -1, 2, 2)$$

Domanda 4 a- Trovare delle equazioni cartesiane che determinino l'ortogonale del piano bidimensionale di $\mathbf{R}^5$ definito da
$$\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases}$$
b- Descrivere in forma parametrica tale ortogonale.

$v^{(1)}$ $\quad$ $v^{(2)}$

a) il piano (D3) è $\underline{s(-7,0,-1,2,2)+t(-1,1,0,0,0)}$

se $\langle W\cdot v^{(1)}\rangle = 0$ $\quad \langle W\cdot v^{(2)}\rangle = 0$

allora $\langle W\cdot P\rangle = 0$ $\forall P$ del piano

$\langle W\cdot(s v^1 + t v^2)\rangle = s\langle W\cdot v^1\rangle + t\langle W\cdot v^2\rangle = 0$

$W=(x\, y\, z\, u\, v)$ $\quad$ 0 $\quad$ 0

$$\begin{cases} -7x - z + 2u + 2v = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l} x = x \\ y = x \\ z = -7x+2u+2v \\ u = u \\ v = v \end{array}\right.$$

b) $x = y \qquad z = -7x + 2u + 2v$

$(x, x, -7x+2u+2v, u, v) =$

$= x(1,1,-7,0,0) + u(0\,0\,2\,1\,0) + v(0\,0\,2\,0\,1)$

ESERCIZI LASCIATI

I D5

II D9

III ESERCIZIO 2

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 2.

Si discuta al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ la dimensione dell'insieme delle eventuali soluzioni del sistema nelle variabili $(x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4$ $\begin{cases} \alpha x & + & y & + & 3z & + & \alpha u & = & \alpha \\ x & + & \alpha y & + & 3\alpha z & + & 2u & = & \alpha + 1 \\ x & + & y & + & z & + & 2u & = & \alpha - 1 \\ \alpha x & + & y & - & z & + & u & = & 0 \end{cases}$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 3.

1. Si riduca a scala la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 & a \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & c \end{pmatrix}$.

2. Usando tale riduzione si discuta, al variare dei dati $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ il sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z + v + 4w = a \\ x + y + 3z + 2v + 3w = b \\ x + y - z + v + 2w = c \end{cases}$$

   nelle incognite $(x, y, z, u, v, w) \in \mathbf{R}^6$, scrivendo in forma parametrica l'insieme delle soluzioni.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 3.

1. Si riduca a scala la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 & a \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & c \end{pmatrix}$.

2. Usando tale riduzione si discuta, al variare dei dati $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ il sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z + v + 4w = a \\ x + y + 3z + 2v + 3w = b \\ x + y - z + v + 2w = c \end{cases}$$

nelle incognite $(x, y, z, u, v, w) \in \mathbf{R}^6$, scrivendo in forma parametrica l'insieme delle soluzioni.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 5.

1. Si riduca a scala la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & 2 & b \\ 3 & 3 & -1 & -4 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 1 & 2 & 1 & 3 & e \\ 4 & 3 & 2 & 2 & f \end{pmatrix}$.

2. Usando tale riduzione si discuta, al variare dei dati $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbf{R}^6$ il sistema

$$\begin{cases} x + y + z + 2u = a \\ x + y + z + 2u = b \\ 3x + 3y - z - 4u = c \\ 0 = d \\ x + 2y + z + 3u = e \\ 4x + 3y + 2z + 2u = f \end{cases}$$

nelle incognite $(x, y, z, u) \in \mathbf{R}^6$;
- scrivendo in forma cartesiana e in forma parametrica le condizioni sui dati per la risolubilità,
- scrivendo in forma parametrica l'insieme delle soluzioni.