Esercitazione 6 3 novembre

AVVISO:

iscriversi al sito CLASSROOM del corso per i ricevimenti della professoressa FIDANZA

... e partecipare numerosi

per informazioni (codice etc...) scrivere alla professoressa FIDANZA

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Secondo foglio di esercizi
Domande di introduzione

Domanda 1 a- Mostrare con un esempio che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^5$ posson essere "sghembi", ovvero avere intersezione vuota ma con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0,0)$, che si intersecano solo in $(0,0,0,0,0)$.
Si assuma che dati quattro elementi di $\mathbf{R}^4$ linearmente indipendenti, ogni altro elemento di $\mathbf{R}^4$ si scrive come somma di loro multipli reali.
b- Si mostri quindi che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^4$ con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0)$, che si intersecano solo in $(0,0,0,0)$, si intersecano in almeno un punto.
c- Si mostri quindi che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^4$ con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0)$ con intersezione non solo $\{(0,0,0,0)\}$, possono aver intersezione vuota.

Domanda 2 Trovare la proiezione ortogonale di $(1,2,3,4,5)$ sulla retta $t(1,1,2,1,3),\ t \in \mathbf{R}$.

Domanda 3 a- Mostrare che le soluzioni del sistema nelle variabili $(x,y,z,u,v) \in \mathbf{R}^5$ determinano un piano bidimensioanle $\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases}$
b- Descrivere in forma parametrica tale piano bidimensionale.

Domanda 4 a- Trovare delle equazioni cartesiane che determinino l'ortogonale del piano bidimensionale di $\mathbf{R}^5$ definito da $\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases}$
b- Descrivere in forma parametrica tale ortogonale.

Domanda 5 Trovare la proiezione ortogonale di $(1,2,3,4,5)$ sul piano bidimensionale di $\mathbf{R}^5$ definito da $\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases}$.

Domanda 6 Calcolare la distanza di $(1,2,3,4,5)$ dal piano bidimensionale di $\mathbf{R}^5$ definito da
$\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases}$.

Domanda 7 Calcolare la distanza di $(1,2,3,4,5)$ dal piano bidimensionale di $\mathbf{R}^5$ dato in forma parametrica da $s(1,1,1,0,1) + t(1,0,1,1,1),\ t,\ s \in \mathbf{R}$.

Domanda 8 Determinare la proiezione ortogonale della retta in $\mathbf{R}^4$ data in forma parametrica $t(1,1,1,1)$, $t \in \mathbf{R}$ sul piano bidimensionale in $\mathbf{R}^4$ definto da $\begin{cases} x - y + z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases}$.

Domanda 9a- Verificare che le equazioni $\begin{cases} x + 2y + 2z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \\ x - y - z + u = 0 \end{cases}$, $(x,y,z,u) \in \mathbf{R}^4$,

individuano una retta in $\mathbf{R}^4$.

b- Nel caso trovare delle equazioni per la sua proiezione ortogonale sul piano bidimensionale in $\mathbf{R}^4$ definto da $\begin{cases} x - y + z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases}$.

Domanda 10 Determinare la proiezione ortogonale della retta di $\mathbf{R}^4$ individuata da
$\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ x - y + z + 2u = 1 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases}$, sul piano definto da $\begin{cases} x - y + z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases}$.

risolvere $\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 1 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 2 \\ x + y - z + u + 2v = 3 \end{cases}$

- da quanto fatto per la domanda 3b il sistema omogeneo ha soluzioni

$(-7s - t, t, -s, 2s, 2s) = u(s,t)$

$\begin{cases} \dots = 0 \\ \dots = 0 \\ \dots = 0 \end{cases}$ base del sottospazio delle soluz

$(-7, 0, -1, 2, 2), (-1, 1, 0, 0, 0)$

- se si trova una particolare soluzione v ogni altra soluzione w è tale che

LINEARITÀ $w - v$ è soluzione del sistema omogeneo

$A(w-v) = Aw - Av = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

quindi ogni soluzione è del tipo

$v + u(s,t)$

Basta quindi trovare una soluzione e le soluzioni dell'omogeneo per trovare tutte le soluzioni

$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{matrix}$

per trovare una soluzione particolare ogni metodo va bene
in questo caso procediamo con la riduzione a scala finché il sistema equivalente è così semplice da trovare una soluzione a vista

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ I-II \\ I-III \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$II \leftrightarrow III \quad \begin{array}{ccccc|c} x & y & z & u & v & \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

$$4z + 2v = -2$$
$$-u + v = -1$$

$z = u = 0$
$v = -1$

$x + y - 4 = 1 \qquad x + y = 5$

scegliemo $x = 0 \quad y = 5$

$$\underline{v = (0, 5, 0, 0, -1)}$$

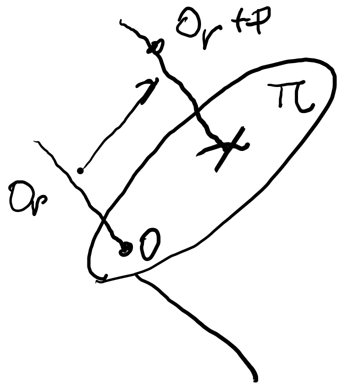
tutte le soluzioni sono

$v + u(s,t) =$

$= (-7s - t, t + 5, -s, 2s, 2s - 1) \quad s, t \in \mathbb{R}$

Domanda 5 Trovare la proiezione ortogonale di $(1,2,\overset{P}{3},4,5)$ sul piano bidimensionale di $\mathbb{R}^5$ definito

$$\text{da}\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases} \quad \pi$$



1) Usando quanto fatto per la domanda 4 l'ortogonale al piano ha equazioni

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -7x - z + 2u + 2v = 0 \end{cases} \qquad Or$$

$Or + P$

2) $x - y = 1 - 2$

$$-7x - z + 2u + 2v = \cancel{-7} \cancel{-3} + 8 \cancel{+10} = 8$$

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 7x + z - 2u - 2v = -8 \end{cases} \qquad Or + P$$

3) intersezione tra π e $Or+P$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 1 & -2 & -2 & -8 \end{matrix}}_{A} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 1 & -2 & -2 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

ma noi (esercizio 3) conosciamo già la forma param. di π

forma parametrica di π

$$u(s,t) = (\overset{x}{-7s-t}, \overset{y}{t}, \overset{z}{-s}, \overset{u}{2s}, \overset{v}{2s})$$

sostituiamo nelle equazioni (2!)

di $Or+P$ sono sicuro di ottenere una sol

NOTA $\dim Or = 5 - \dim \pi$

$v_1\ v_2$ base di π

$u_1 \dots u_k$ base ortogonale Or

poiché in particolare $\underline{Or \cap \pi = (\underline{0})}$

si ottiene che

$v_1\ v_2\ u_1 \dots u_k$

sono indipendenti

quindi $k \leq 3$ . . . $(Or+P) \cap \pi = \{Q\}$

$$\begin{array}{r} 116 \\ 49 \\ \hline 67 \end{array}$$

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 7x+z-2u-2v=-8 \end{cases}$$

$-7s-t-t=-1$ $\quad 7s+2t=1$

$-49s-7t-s-4s-4s=-8$ $\quad 58s+7t=8$

eliminiamo t $\quad 49s+14t=7$ $\quad 116s+14t=16$

$67s=9$ $\quad s=\frac{9}{67}$ $\quad t=1-\frac{63}{67}$

Esercizio Acquistapace

Discutere il sistema (dimensione delle giaciture dell'insieme delle soluzioni) al variare di a e b in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ x + ay + 3z + 2u = b \\ -x - y + (a^2-2)z = 0 \\ (a-1)y + 2z + (2-a)u = b-1 \end{cases}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ -1 & -1 & a^2-2 & 0 \\ 0 & a-1 & 2 & 2-a \end{pmatrix} \sim \varphi_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$\varphi_A(x,y,z,u) =$

$= x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ a-1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2-2 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2-a \end{pmatrix}$

$\varphi_A^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ b-1 \end{pmatrix}\right\}$

- $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 3 & 2 & b \\ -1 & -1 & a^2-2 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{a-1} & 2 & 2-a & b-1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \\ I-II \\ I+III \\ IV+II \end{matrix}$ NUOVA $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{1-a} & -2 & -1 & -b \\ 0 & 0 & a^2-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1-a} & \underline{-1} \end{matrix}$

$$\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ (1-a)y - 2z - u = -b \\ (a^2-1)z + u = 0 \\ (1-a)u = -1 \end{cases}$$

(1) $a = 1$

$0 = -1$

NON VI SONO SOLUZIONI

"$\dim \varphi = -\infty$"

(2) $a \neq 1$

CONTARE I PIVOT

$u = 0$

$2u = -1$

(2a) $a^2 = 1$ $(a=-1)$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ NON VI SONO SOLUZIONI

(2b) $a^2 \neq 1$

VI SONO 4 PIVOT (NON NULLI) QUINDI C'È UNICITÀ DI SOL. Per ogni b: $\dim \varphi = 0$

Esercizio 4.4 Carrara

Risolvere al variare di k in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ x + y + 3z + 2w = 1 \\ 2x + y + (k+2)z + 4w = 2 \\ x + y + 3z + (k^2 - k + 2)w = k \end{cases}$$

lasciato per casa

Esercizio 1.14 Carrara.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$: D è combinazione lineare di A, B, C ?

$xA + yB + zC = D$ ha soluzione

$$x \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} + y \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} + z \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

1:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x + y + 2z = -1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 3z = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ I+II \\ 2I-III \\ 3I-IV \end{array} \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -6 & -2 \end{matrix} \quad IV \to II \quad \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{matrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ III-IV \end{array} \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{matrix} \to z = 0$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{matrix}$$

NON VI SONO SOL.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 1.

1. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ le equazioni $\begin{cases} \alpha x + y + 3z + \alpha u = \alpha \\ x + \alpha y + 3\alpha z + 2u = \alpha + 1 \\ x + y + z + 2u = \alpha - 1 \end{cases}$, $(x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4$, individuano una retta?
2. Per quali tra questi parametri la retta non ha intersezione con il piano bidimensionale in $\mathbf{R}^4$ definito da $\begin{cases} x - y + z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases}$?
3. Per quali di quest'ultimi parametri la retta non ha traslate contenute nello stesso piano?

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 2.

Si discuta al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ la dimensione dell'insieme delle eventuali soluzioni del sistema nelle variabili $(x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4$ $\begin{cases} \alpha x + y + 3z + \alpha u = \alpha \\ x + \alpha y + 3\alpha z + 2u = \alpha + 1 \\ x + y + z + 2u = \alpha - 1 \\ \alpha x + y - z + u = 0 \end{cases}$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 3.

1. Si riduca a scala la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 & a \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & c \end{pmatrix}$.

2. Usando tale riduzione si discuta, al variare dei dati $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ il sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z + v + 4w = a \\ x + y + 3z + 2v + 3w = b \\ x + y - z + v + 2w = c \end{cases}$$

nelle incognite $(x, y, z, u, v, w) \in \mathbf{R}^6$, scrivendo in forma parametrica l'insieme delle soluzioni.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 4.

1. Si riduca a scala la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 3 & 3 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 1 & 2 & 1 & e \\ 4 & 3 & 2 & f \end{pmatrix}$.

2. Usando tale riduzione si discuta, al variare dei dati $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbf{R}^6$ il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + z = b \\ 3x + 3y - z = c \\ 0 = d \\ x + 2y + z = e \\ 4x + 3y + 2z = f \end{cases}$$

   nelle incognite $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$;
   - scrivendo in forma cartesiana e in forma parametrica le condizioni sui dati per la risolubilità,
   - scrivendo in forma parametrica l'insieme delle soluzioni.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 5.

1. Si riduca a scala la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & 2 & b \\ 3 & 3 & -1 & -4 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 1 & 2 & 1 & 3 & e \\ 4 & 3 & 2 & 2 & f \end{pmatrix}$.

2. Usando tale riduzione si discuta, al variare dei dati $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbf{R}^6$ il sistema

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & + & 2u & = & a \\ x & + & y & + & z & + & 2u & = & b \\ 3x & + & 3y & - & z & - & 4u & = & c \\ & & & & & & 0 & = & d \\ x & + & 2y & + & z & + & 3u & = & e \\ 4x & + & 3y & + & 2z & +2u & = & f \end{cases}$$

nelle incognite $(x, y, z, u) \in \mathbf{R}^6$;
- scrivendo in forma cartesiana e in forma parametrica le condizioni sui dati per la risolubilità,
- scrivendo in forma parametrica l'insieme delle soluzioni.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Terzo foglio di esercizi
Domande di introduzione

Domanda 1 a- Mostrare che l'insieme $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ dato dalle funzioni reali di variabile reale pari $\mathcal{P}$ o dispari $\mathcal{D}$, non è un sottospazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale.
b- Qual'è il sottospazio generato da $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$?

Domanda 2 a- Mostrare che i sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) =: V$ delle matrici reali $n \times n$, $\mathcal{S}(n, \mathbf{R}) =: S$ delle matrici simmetriche e $\mathcal{A}(n, \mathbf{R}) =: A$ delle matrici antisimmetriche sono suoi sottaspazi vettoriali. b- Calcolare la dimensione di S e di A.
c-Mostrare che ogni per ogni $v \in V$ vi sono *unici* $a \in A$ e $b \in B$ per cui $v = a + b$:

è la *definizione di "V* è somma diretta *di A e di B": $V = A \oplus S$.*

Domanda 3 a- Si mostri che l'insieme $\mathcal{A}$ delle matrici 4×4 con i primi due elementi della diagonale uguali e l'insieme $\mathcal{B}$ delle matrici 4×4 con gli ultimi due elementi della diagonale uguali sono sottospazi vettoriali delle matrici 4×4.
b- Che dimensione hanno? c- Che sottospazio genera $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$?

Domanda 4 Dato uno spazio vettoriale V mostrare che l'unione $A \cup B$ di due suoi sottospazi A e B è a sua volta uno sottospazio se e solo se A e B sono uno sottospazio dell'altro. E per $A \cap B$?

Domanda 5 Si scrivano le equazioni del sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dall'unione dell'ortogonale a $\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ e di quello a $\begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ (cfr. Esercizio 2).

Domanda 6 Si considerino i sottospazi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^5$ rispettivamente definiti da
$$\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \\ x & +2y & +2z & +u & +v & = 0 \end{cases}$$
a- Si mostri che $\mathbf{R}^5 = A \oplus B$. b- Si calcoli la proiezione su $\mathcal{A}$ parallela a $\mathcal{B}$ del vettore $(1, 2, 3, 4, 5)$.

Domanda 7 a- Denotati i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$ con e_1, e_2, e_3 mostrare che e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$ sono una base. b- Scrivere le coordinate di $(2, 1, 1)$ in tale base.

Domanda 8 a- Sia $n \in \mathbf{N}$, si mostri che i polinomi di grado (esattamente) n non sono un sottospazio vettoriale dei polinomi.
b- Il polinomio $z - 2$ che coordinate ha rispetto alla base $1,\ z,\ z^2, z^3$ dello spazio vettoriale $\mathbf{C}[z]_3$ dei polinomi di grado al più 3?
c- Quale sottospazio vettoriale generano i polinomi $z - 1,\ z^2 + 1,\ z^3 - z^2,\ z^3 - z$? Sono una base di $\mathbf{C}[z]_3$? Nel caso scrivere le relative coordinate di $z - 2$.

Domanda 9 a- Dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici sono un sottospazio vettoriale $V_{a_1 \dots a_n}$ di $\mathbf{C}[z]$ di dimensione infinita.
b- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno esattamente come loro radici non sono un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.
c- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici semplici insieme al polinomio nullo non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.

Domanda 10 Trovare W sottospazio di $\mathbf{C}[z]$ per cui $\mathbf{C}[z] = W \oplus V_{a_1 \dots a_n}$. Quindi un sottospazio vettoriale di dimensione infinita di $\mathbf{C}[z]$ che non sia del tipo $V_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$.

Domanda 11 a- Trovare due funzioni $f(t)$, $g(t)$, $t \in \mathbf{R}$, reali di variabile reale che generino su $\mathbf{C}$ lo stesso sottospazio dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ generato da $e^{(1+i)t}$, $e^{(1-i)t}$.

Domanda 2 a- Mostrare che i sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{M}(n,n,\mathbf{R}) =: V$ delle matrici reali $n \times n$, $\mathcal{S}(n,\mathbf{R}) =: S$ delle matrici simmetriche e $\mathcal{A}(n,\mathbf{R}) =: A$ delle matrici antisimmetriche sono suoi sottaspazi vettoriali. b- Calcolare la dimensione di S e di A.
c-Mostrare che ogni per ogni $v \in V$ vi sono *unici* $a \in A$ e $b \in B$ per cui $v = a + b$:

è la *definizione di* "V è somma diretta *di* A *e di* B": $V = A \oplus S$.

indice di colonna

A matrice quadrata si dice simmetrica se $A^j_i = A^i_j$

indice di riga

cioè se scambio righe con colonne la matrice non cambia

In generale data $\underset{n\times m}{M} \in \mathcal{M}(n,m)$ n righe ed m colonne se scambiamo righe con colonne otteniamo una matrice $m \times n$ che viene chiamata trasposta di M e si indica con ${}^tM$, ${}^TM$, M^t, M^T

SIMMETRICA VUOL DIRE $A = {}^tA$

IMPORTANZA $\langle \underset{\substack{n\times m\\ \mathbb{R}^n}}{M} \overset{\mathbb{R}^m}{X} \cdot \underset{\mathbb{R}^n}{Y} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \underset{\mathbb{R}^m}{X} \cdot \underset{\substack{m\times n\\ \mathbb{R}^m}}{{}^tM} \overset{\mathbb{R}^n}{y} \rangle_{\mathbb{R}^m}$ $\qquad \underset{n\times m}{M} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

anzi esercizio: $\langle \underset{n\times m}{M} X \cdot Y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle X \cdot \underset{m\times n}{N} y \rangle_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow {}^tM = N$

se A è simmetrica $\langle Ax \cdot Y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle X \cdot Ay \rangle_{\mathbb{R}^n}$

A matrice quadrata si dice antisimmetrica se $A^j_i = -A^i_j$
cioè ${}^tA = -A$

2a se A e B sono simmetriche (antis. . .

$$A^j_i = A^i_j \qquad B^j_i = B^i_j \qquad (A^j_i = -A^j_i \; \dots)$$

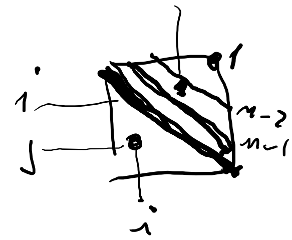
$$(\lambda A + \mu B)^j_i = \lambda A^j_i + \mu B^j_i = \pm\lambda A^i_j \pm \mu B^i_j = \pm(\lambda A + \mu)^i_j \; .$$

$$\frac{(n-1)\,n}{2} + n =$$

$$\underbrace{1+2+3+\dots+n-1}$$

2b dim S_n dim $\underset{\text{ant.}}{A_n}$

sfsp. mat. $n \times n$ sim



$$A^i_i = -A^i_i$$

$n=2$ $\quad S_2 = \left\{\begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}\right\}$

dim $S_2 = 3$

$$A_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

dim $A_2 = 1$

$$A^i_i = -A^i_i$$

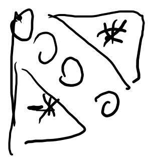
mat. simm.
soluz del sistema

$\cancel{j > i}$ $\boxed{j \geq i}$ $\quad A^j_i - A^i_j = 0$

n^2 incognite

$$\text{dim } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

matrice ant



$$\text{dim } A_n = \frac{(n-1)\,n}{2}$$

$$\dim S_n = \frac{(n+1)n}{2} \qquad \dim A_n = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$S_n \cap A_n = \{\underline{O}\}$$

$$\begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= v \\ z &= -u \end{aligned}$$

$$\underline{A^i_j} = A^j_i = \underline{-A^i_j}$$

$$\dim S_n + A_n = \dim S_n + \dim A_n - \cancel{\dim S_n \cap A_n}\ O$$

$$= \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2+n+n^2-n}{2} = n^2$$

LO SPAZIO SOMMA
HA LA STESSA
DIMENSIONE DELLO
SPAZIO AMBIENTE

M

$A = \frac{M - {}^tM}{2}$

$S = \frac{M + {}^tM}{2}$

$$S_n + A_n = M_n \quad (1)$$

$$S_n \cap A_n = (\underline{0}) \quad (2)$$

che ogni matrice $M_{n \times n}$
si scrive ~~com~~ $M = S + A$ (1)

simm antisimm

in modo unico
$M = S + A = S' + A'$

$S - S' = A - A' = 0$

sim antisim

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Ricordiamo la definizione di sottospazio generato. Sia V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme non vuoto qualsiasi.
Il *sottospazio generato da* $\mathcal{A}$, indicato con $\operatorname{span}(\mathcal{A})$, è l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di $\mathcal{A}$. (Si osservi che una combinazione lineare di elementi di $\mathcal{A}$ in particolare è una somma finita di elementi di V).

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme non vuoto:

1. Si dimostri che in effetti $\operatorname{span}(\mathcal{A})$ è un sottospazio vettoriale di V.
2. Provare che $\operatorname{span}(\mathcal{A}) = \bigcap\{W : \ W \text{ sottospazio di } V, W \supseteq \mathcal{A}\}$.
3. Provare che esiste il *piuù piccolo* sottospazio vettoriale di V che contiene $\mathcal{A}$, nel senso seguente:

$$\text{se } W \text{ sottospazio di } V \text{ e } W \supseteq \mathcal{A} \text{ allora anche } W \supseteq U.$$

   e coincide con $\operatorname{span}(\mathcal{A})$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Ricordiamo la definizione di ortogonale in $\mathbf{R}^n$:
- prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$ (cfr. primo foglio) : dati $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ si definisce il loro prodotto scalare $\langle u \cdot v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$;
- proprietà: $\langle u \cdot v \rangle = \langle v \cdot u \rangle$, $\langle u + rw \cdot v \rangle = \langle u \cdot v \rangle + r \langle w \cdot v \rangle$ se $r \in \mathbf{R}$ e $w \in \mathbf{R}^n$;
- due vettori di $\mathbf{R}^n$ si dicono ortogonali se hanno prodotto scalare nullo;
- dato $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{R}^n$, si definisce l'ortogonale di $\mathcal{A}$ l'insieme dei vettori ortogonali agli elementi di $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^\perp = \{v \in \mathbf{R}^n : \forall \alpha \in \mathcal{A}\ \langle v \cdot \alpha \rangle = 0\}.$$

Esercizio 3. a- Qulsiasi sia il sottoinsieme $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^n$, il suo ortogonale $\mathcal{A}^\perp$ è sempre un sottospazio vettoriale.
b- Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^n$, e si denotino i rispettivi ortogonali con $\mathcal{A}^\perp$, $\mathcal{B}^\perp$ Si mostri:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff \mathcal{B}^\perp \subseteq \mathcal{A}^\perp$;
2. $\mathcal{A} = \left(\mathcal{A}^\perp\right)^\perp$;
3. $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp$, $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp$.