Esercitazione 9
23 novembre

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Terzo foglio di esercizi

Domande di introduzione

Domanda 1 a- Mostrare che l'insieme $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ dato dalle funzioni reali di variabile reale pari $\mathcal{P}$ o dispari $\mathcal{D}$, non è un sottospazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale.
b- Qual'è il sottospazio generato da $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$?

Domanda 2 a- Mostrare che i sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) =: V$ delle matrici reali $n \times n$, $\mathcal{S}(n, \mathbf{R}) =: S$ delle matrici simmetriche e $\mathcal{A}(n, \mathbf{R}) =: A$ delle matrici antisimmetriche sono suoi sottaspazi vettoriali. b- Calcolare la dimensione di S e di A.
c-Mostrare che ogni per ogni $v \in V$ vi sono unici $a \in A$ e $b \in B$ per cui $v = a + b$:
è la *definizione di "V è somma diretta di A e di B"*: $V = A \oplus S$.

Domanda 3 a- Si mostri che l'insieme $\mathcal{A}$ delle matrici 4×4 con i primi due elementi della diagonale uguali e l'insieme $\mathcal{B}$ delle matrici 4×4 con gli ultimi due elementi della diagonale uguali sono sottospazi vettoriali delle matrici 4×4.
b- Che dimensione hanno? c- Che sottospazio genera $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$?

Per casa

Domanda 4 Dato uno spazio vettoriale V mostrare che l'unione $A \cup B$ di due suoi sottospazi A e B è a sua volta uno sottospazio se e solo se A e B sono uno sottospazio dell'altro. E per $A \cap B$?

Domanda 5 Si scrivano le equazioni del sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dall'unione dell'ortogonale a $\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ e di quello a $\begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ (cfr. Esercizio 2).

ES. 3

Domanda 6 Si considerino i sottospazi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^5$ rispettivamente definiti da
$\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \\ x & +2y & +2z & +u & +v & = 0 \end{cases}$
a- Si mostri che $\mathbf{R}^5 = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$. b- Si calcoli la proiezione su $\mathcal{A}$ parallela a $\mathcal{B}$ del vettore $(1, 2, 3, 4, 5)$.

Domanda 7 a- Denotati i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$ con e_1, e_2, e_3 mostrare che e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$ sono una base. b- Scrivere le coordinate di $(2, 1, 1)$ in tale base.

Domanda 8 a- Sia $n \in \mathbf{N}$, si mostri che i polinomi di grado (esattamente) n non sono un sottospazio vettoriale dei polinomi.
b- Il polinomio $z - 2$ che coordinate ha rispetto alla base $1,\ z,\ z^2, z^3$ dello spazio vettoriale $\mathbf{C}[z]_3$ dei polinomi di grado al più 3?
c- Quale sottospazio vettoriale generano i polinomi $z - 1,\ z^2 + 1,\ z^3 - z^2,\ z^3 - z$? Sono una base di $\mathbf{C}[z]_3$? Nel caso scrivere le relative coordinate di $z - 2$.

Domanda 9 a- Dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici sono un sottospazio vettoriale $V_{a_1 \ldots a_n}$ di $\mathbf{C}[z]$ di dimensione infinita.
b- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno esattamente come loro radici non sono un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.
c- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme $\mathcal{S}$ dei polinomi che li hanno tra le loro radici semplici insieme al polinomio nullo non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$. $n=2$ $a_1 = 0_{\mathbb{C}}$, $a_2 = 1_{\mathbb{C}}$ z, $z(z-1) \in \mathcal{S}$; $az + bz^2 - bz = z(bz + (a-b))$ $b=1$ $a=2$ ha come radice semp -1, non sta in $\mathcal{S}$

α è radice semplice di $P \in \mathbb{C}[z]$ se $P = (z-\alpha)Q$ e $P \neq (z-\alpha)^2 \tilde{Q}$

Domanda 10 Trovare W sottospazio di $\mathbf{C}[z]$ per cui $\mathbf{C}[z] = W \oplus V_{a_1 \ldots a_n}$. Quindi un sottospazio vettoriale di dimensione infinita di $\mathbf{C}[z]$ che non sia del tipo $V_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$. $P = \prod_{h=1}^{n}(z - a_h) \cdot Q + ?$ *

cfr. sotto

Domanda 11 a- Trovare due funzioni $f(t)$, $g(t)$, $t \in \mathbf{R}$, reali di variabile reale che generino su $\mathbf{C}$ lo stesso sottospazio dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ generato da $e^{(1+i)t}$, $e^{(1-i)t}$.

$a_h \neq a_k$ $h \neq k$ $V_{a_1 \ldots a_n} = \{p \in \mathbb{C}[z] : g_p(a_h) = 0 \ \forall h = 1 \ldots n\}$

$\prod_{j=1}^{n} Q_j = Q_n \cdot \prod_{j=1}^{n-1} Q_j \overset{\text{intuit.}}{=} Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_n$

Poiché $V_{a_1 \ldots a_n} = \prod_{j=1}^{n}(z - a_j) \cdot \mathbb{C}[z]$ ha come elementi polinomi di qualsiasi grado, non può essere generato da un num. finito di polinomi.
Si è dimostrato di più: se $a_{n+1} \neq a_j$ $1 \leq j \leq n$ allora $(z - a_1) \cdot \ldots \cdot (z - a_n) \cdot (z - a_{n+1})^h$, $h \in \mathbb{N}$ sono indipendenti.

b $\mathcal{P} = \{p : g_p(\alpha) = 0_{\mathbb{C}} \Rightarrow \alpha \in \{a_1 \ldots a_n\}\}$ non è un sottospazio vett. $\mathbb{C}[z]$ poiché $0 \notin \mathcal{P}$
altro modo: $n=1$ $a_1 = 0_{\mathbb{C}}$ $z^2, z \in \mathcal{P}$ $z^2 - z \notin \mathcal{P}$ $z^2 - z$ ha come radice $1_{\mathbb{C}}$ e $1_{\mathbb{C}} \neq 0_{\mathbb{C}}$

* Teorema di divisione divido P per $\prod_{h=1}^{n}(z - a_h)$
$\exists !\ Q, R$ $\deg R < n$ $P = \prod_{h=1}^{n}(z - a_h) \cdot Q + R$
$\deg R \leq n - 1$
$\mathbb{C}[z]_{n-1} = \{R : \deg R \leq n-1\}$ è un sottospazio
quindi $\mathbb{C}[z] = V_{a_1 \ldots a_n} + \mathbb{C}[z]_{n-1}$
$\mathbb{C}[z] = V_{a_1 \ldots a_n} \oplus \mathbb{C}[z]_{n-1}$

• V stp $\mathbb{C}[z]$ $\dim V = \infty$ ma V non sia $V_{a_1 \ldots a_n}$
per casa
suggerimento $\mathbb{C}[z]$ quasi per definizione di polinomio e $\mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$ con $\mathcal{P}$ e $\mathcal{D}$ sottospazi di dim. ∞

b- Dati $r, \omega \in \mathbf{R}$, $\omega \neq 0$, provare che $e^{rt}\sin(\omega t)$ e $e^{rt}\cos(\omega t)$ sono lineramente indipendenti come vettori dello spazio complesso delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 12 Tenendo presente la notazione $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ quando $z = x + iy \in \mathbf{C}$:
a- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da e^{at} ed e^{bt} sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
b- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $e^{a_1 t}, \ldots e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
c- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ e due polinomi $p(t)$, $q(t)$ non nulli a coefficienti complessi, le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p(t)e^{at}$ ed $q(t)e^{bt}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
d- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, e polinomi non tutti nulli $p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{C}[t]$, $n \in \mathbf{N}$, e le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p_1(t)e^{a_1 t}, \ldots p_n(t)e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 13 Si mostri che l'insieme di funzioni $\{t^n e^{at} : n \in \mathbf{N},\ a \in \mathbf{C}\}$ è un sistema di funzioni linearmente indipendenti nello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 11 a- Trovare due funzioni $f(t)$, $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, reali di variabile reale che generino su $\mathbb{C}$ lo stesso sottospazio dello spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ generato da $e^{(1+i)t}$, $e^{(1-i)t}$.

b- dati $r, \omega \in \mathbb{R}$ $\omega \neq 0$ le funzioni $f(t) = e^{rt}\cos\omega t$ e $g(t) = e^{rt}\sin\omega t$ sono lin. indip. su $\mathbb{C}$

ESP. COM.

$e^z := e^{\operatorname{Re} z}\cdot(\cos \operatorname{Im} z + i \sin \operatorname{Im} z)$

$z = x + iy$

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $e^z \neq 0_{\mathbb{C}}$ *

$e^z \cdot e^w = e^{z+w}$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$

$z = x + iy$

$\varphi(t) = e^{t\cdot z} =$

$= e^{tx}(\cos ty + i \sin ty)$

$\varphi'(t) = \dots = z\cdot e^{tz}$

* $|e^z| = \sqrt{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y} =$

$= e^x > 0 \quad \forall x$

<u>a</u> $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$\operatorname{span}_{\mathbb{C}} < e^{(1+i)t}, e^{(1-i)t} > = V$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $\alpha e^{(1+i)t} + \beta e^{(1-i)t}$

Trovare due $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{f, g\} = V$

$\alpha e^t(\cos t + i\sin t) + \beta e^t(\cos t - i \sin t)$

$\boxed{(\alpha+\beta)} e^t\cos t + \boxed{(\alpha-\beta)i}\, e^t \sin t = Ae^t\cos t + Be^t\sin t$ %

$A, B \in \mathbb{C}$

b. DUE FUNZ. SON. LIN. INDIP.

$\alpha f + \beta g = 0_{\text{Fun}}$ ha solo la sol. nulla

SISTEMA 2 INCOGNITE α e β

INFINITE EQUAZIONI

$\cdot\ \alpha\cdot f(t) + \beta\cdot g(t) = 0_{\mathbb{C}}$ $\forall t$

Quindi $V =: \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(e^{(1+i)t}, e^{(1-i)t}) \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(e^t\cos t, e^t\sin t) =: U$

AGGIUNTO DOPO LEZIONE ↓

L'inclusione inversa si ha osservando che
$$e^t\cos t = \frac{e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t}}{2}$$
$$e^t\sin t = \frac{e^{(1+i)t} - e^{(1-i)t}}{2i}$$

Oppure osservando che

- $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$ essendo $e^{(1+i)t}, e^{(1-i)t}$ lin. ind.:
se vi sono α e $\beta \in \mathbb{C}$ $\alpha e^{(1+i)t} + \beta e^{(1-i)t} = 0_{\mathbb{C}}$ $\forall t$
in particolare per $t=0$ si ha $\alpha + \beta = 0_{\mathbb{C}}$ $*$
e per $t=1$ $\alpha e(\cos 1 + i\sin 1) + \beta e(\cos 1 - i\sin 1) = 0_{\mathbb{C}}$
che comporta $\cancel{(\alpha+\beta)\cos 1} + i(\alpha-\beta)\sin 1 = 0$
per $*$ $\alpha+\beta=0$ $\quad\Downarrow\; i\sin 1 \neq 0$ $\quad \alpha-\beta=0$
Quindi $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=0\end{cases} \iff \alpha=\beta=0.$

- Analogamente $\dim_{\mathbb{C}} U = 2$: $\alpha e^t\cos t + \beta e^t\sin t = 0_{\mathbb{C}}$ $\forall t$
$t=0$: $\alpha = 0_{\mathbb{C}}$
$t=\pi/2$: $\beta e^{\pi/2} = 0_{\mathbb{C}}$

D.11 b: stessa procedura con $t=0$ e $t=\frac{\pi}{2\omega}$.

detto a voce a lezione

NOTA

Dire che n funzioni $f_1, \dots, f_n : D \to \mathbb{C}$ sono <u>linearmente indipendenti</u> vuol dire che

EQUAZIONE FUNZIONALE

se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ $\quad \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0_{D \to \mathbb{C}}$

funzione costantemente nulla

allora $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{C}}$

cioè
se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ e $\forall t \quad \alpha_1 f_1(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) = 0_{\mathbb{C}}$

EQUAZIONI NUMERICHE

allora $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{C}}$

cioè
IL SISTEMA NUMERICO CON n INCOGNITE $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$
E NUMERO DI EQUAZIONI PARI A numero elementi di D

$$\forall t \in D \quad \alpha_1 f_1(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) = 0_{\mathbb{C}}$$

HA SOLO SOLUZIONI NULLE

In altre parole un'equazione funzionale è un sistema con "numero di elementi" di D equazioni,