Esercitazione 10
24 novembre

Si è provato, nell'esercitazione del 23, $V =: \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left(e^{(1+i)t}, e^{(1-i)t}\right) \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left(e^t \cos t, e^t \sin t\right) =: U$

$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

l'inclusione inversa si ha osservando che $e^t \cos t = \dfrac{e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t}}{2} = \dfrac{e^t(\cos t + i \sin t) + e^t(\cos t - i \sin t)}{2}$

$e^t \sin t = \dfrac{e^{(1+i)t} - e^{(1-i)t}}{2i}$ e ciò completa III D.11a

Oppure osservando che

- $\underline{\dim_{\mathbb{C}} V = 2}$ essendo $e^{(1+i)t}, e^{(1-i)t}$ lin. ind.:

se vi sono α e $\beta \in \mathbb{C}$ $\alpha e^{(1+i)t} + \beta e^{(1-i)t} = 0_{\mathbb{C}}$ $\underline{\underline{\forall t}}$

in particolare per $t=0$ si ha $\alpha + \beta = 0_{\mathbb{C}}$ $*$

e per $t=1$ $\alpha e(\cos 1 + i \sin 1) + \beta e(\cos 1 - i \sin 1) = 0_{\mathbb{C}}$

che comporta $\underbrace{(\alpha+\beta)\cos 1}_{\text{per } * \; \alpha+\beta=0} + i(\alpha-\beta)\sin 1 = 0$

$\Downarrow$ $i \sin 1 \neq 0$

$\alpha - \beta = 0$

Quindi $\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha-\beta=0 \end{cases} \iff \alpha=\beta=0.$

- Analogamente $\underline{\dim_{\mathbb{C}} U = 2}$: $\alpha e^t \cos t + \beta e^t \sin t = 0_{\mathbb{C}}$ $\forall t$

$\sin t = 0 \leftarrow t=0$. $\alpha = 0_{\mathbb{C}}$

$\cos t = 0 \leftarrow t = \pi/2$ $\beta e^{\pi/2} = 0_{\mathbb{C}}$

D.11 b: stessa procedura con $t=0$ e $t=\frac{\pi}{2\omega}$. cfr. pagg. seguenti detto a voce durante l'esercitazione del 23/11

NOTA

Vett

Dire che n funzioni $f_1, \dots, f_n : D \to \mathbb{C}$ sono linearmente indipendenti vuol dire che

EQUAZIONE FUNZIONALE

se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ $\quad \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0_{D \to \mathbb{C}}$

somma di funzioni

funzione costantemente nulla

allora $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{C}}$

cioè se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ e $\forall t$ $\alpha_1 f_1(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) = 0_{\mathbb{C}}$

somma di numeri

EQUAZIONI NUMERICHE

allora $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{C}}$

cioè IL SISTEMA NUMERICO CON n INCOGNITE $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$
E NUMERO DI EQUAZIONI PARI A numero elementi di D

$$\forall t \in D \quad \alpha_1 f_1(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) = 0_{\mathbb{C}}$$

HA SOLO SOLUZIONI NULLE

In altre parole un'equazione funzionale è un sistema con "numero di elementi" di D equazioni,

$t = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$t = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\omega} \Rightarrow \beta e^{\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow \beta = 0$

b- Dati $r, \omega \in \mathbf{R}$, $\omega \neq 0$, provare che $e^{rt}\sin(\omega t)$ e $e^{rt}\cos(\omega t)$ sono lineramente indipendenti come vettori dello spazio complesso delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

$e^{x+iy} =: e^x(\cos y + i \sin y)$

$0 \neq z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{\lg\rho + i\theta}$

12a) $a, b \in \mathbb{C}$ $a \neq b$ $e^{at}, e^{bt} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

? se $\alpha e^{at} + \beta e^{bt} = 0_{\mathbb{C}}$ $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha = \beta = 0_{\mathbb{C}}$

divido per $e^{at} \neq 0$ $\quad b - a = A \in \mathbb{C}$

$\alpha + \beta e^{At} = 0_{\mathbb{C}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$t = 0$ $\quad \alpha + \beta = 0_{\mathbb{C}}$

$t \neq \frac{1}{A}$ $\quad A = x + iy$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\alpha + \beta \underbrace{e^{xt}(\cos yt + i \sin yt)}_{e^{At}} = 0$

$y = \operatorname{Im} A \neq 0$ $\quad t = \frac{\pi}{y}$ $\quad \alpha + \beta e^{\pi\frac{x}{y}}\underbrace{(-1)}_{\cos\pi} = 0$

$\alpha - \beta e^{\pi\frac{x}{y}} = 0$ $\quad (1 + e^{\pi\frac{x}{y}})\beta = 0$, $1 + e^{\pi\frac{x}{y}} \neq 0$

$y = \operatorname{Im} A = 0$ $\quad \alpha + \beta e^{xt} = 0$

$t = 1$ $\quad \alpha + \beta e = 0$ $\quad \beta(1 - e) = 0$, $1 - e \neq 0$

Domanda 12 Tenendo presente la notazione $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ quando $z = x + iy \in \mathbf{C}$:

a- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da e^{at} ed e^{bt} sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

b- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $e^{a_1 t}, \ldots e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

c- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ e due polinomi $p(t)$, $q(t)$ non nulli a coefficienti complessi, le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p(t)e^{at}$ ed $q(t)e^{bt}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

d- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, e polinomi non tutti nulli $p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{C}[t]$, $n \in \mathbf{N}$, e le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p_1(t)e^{a_1 t}, \ldots p_n(t)e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 13 Si mostri che l'insieme di funzioni $\{t^n e^{at} : n \in \mathbf{N}, a \in \mathbf{C}\}$ è un sistema di funzioni linearmente indipendenti nello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

$0 = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j t^{n_j} e^{a_j t}$ può essere! $a_j = a_h$ $j \neq h$

induzione su $\sum \deg P_i$

12.c) Per induzione su $\deg P + \deg Q$:

base induzione → Se $\deg P + \deg Q = 0$ le due funzioni polin. sono costanti: è il caso b). Quindi si suppone $\deg P > 0$:

~~induzione su $\deg P + \deg Q$~~, $a \neq b$

$\forall t$ $\alpha P e^{at} + \beta Q e^{bt} = 0_{\mathbb{C}}$ $\quad \alpha P + \beta Q e^{(b-a)t} = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $b - a \neq 0$

→ passo ind. derivo $\quad \alpha P' + \beta(Q' + (b-a)Q)e^{(b-a)t} = 0$

$0 \leq \deg P' < \deg P$ $\quad \deg(Q' + (b-a)Q) \leq \deg Q \to \alpha = 0, \beta = 0$

~~bisogna fare la base induttiva per esempio $\deg P = 1$ $P(t) = t + c$, Q generico~~

~~$\longmapsto$ ind. grado di Q~~

semplificato dopo esercitazione (era già risolto)

$\deg P' + \deg(Q' + (b-a)Q) =$

$= \deg P' + \deg Q \lneq \deg P + \deg Q$

12.b) $e^{a_1 t} = e^{\operatorname{Re} a_1 \cdot t}(\cos(\operatorname{Im} a_1 \cdot t) + i \sin(\operatorname{Im} a_1 \cdot t))$

$e^{a_2 t} \ldots e^{a_n t}$ $\quad a_h \neq a_k$ $h \neq k$

sono lin. indipendenti

$\alpha_1 e^{a_1 t} + \ldots + \alpha_n e^{a_n t} = 0_{\mathbb{C}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0_{\mathbb{C}}$

divido per $e^{a_1 t}$, $a_h - a_1 = A_h$

☆ $\alpha_1 + \alpha_2 e^{A_2 t} + \ldots + \alpha_n e^{A_n t} = 0_{\mathbb{C}}$ $\forall t$

INDUZIONE SU n

$n = 2$ è la parte a)

passo induttivo: derivo $\quad x + iy \leftrightarrow (x, y)$

$\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$ sono sp. vett. reali $\quad \mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$

$e^{At} = e^{xt + iyt} = e^{xt}(\cos yt + i \sin yt) \leftrightarrow (e^{xt}\cos yt, e^{xt}\sin yt)$

$A = x + iy$ $\quad \frac{d}{dt}e^{At} = A e^{At}$ $\quad (x e^{xt}\cos yt - y e^{xt}\sin yt,$

$(x + iy)e^{(x+iy)t} \longleftrightarrow$ $\quad x e^{xt}\sin yt + y e^{xt}\cos yt)$

$\alpha_2 A_2 e^{A_2 t} + \ldots + \alpha_n A_n e^{A_n t} = 0_{\mathbb{C}}$ $\forall t$

sono $n - 1$

IP. INDUT $\quad \alpha_2 A_2 = \ldots = \alpha_n A_n = 0_{\mathbb{C}}$ $\quad A_h = a_h - a_1 \neq 0$

$\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0_{\mathbb{C}}$

SOST. IN ☆ $\quad \alpha_1 = 0_{\mathbb{C}}$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2021/22
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quarto foglio di esercizi

Domande di introduzione

1.0 Le rotazioni attorno all'origine di $\mathbb{R}^2$ sono lineari.

Domanda 1 Dato $\theta \in [0;+\infty)$ si consideri la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in sé ad essa associata $\mathcal{R}(x,y) = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & - & y\sin\theta \\ x\sin\theta & + & y\cos\theta \end{pmatrix}$.

a- Si mostri che essa descrive la rotazione, in senso antiorario di un angolo di θ radianti, intorno a $(0,0)$, del punto corrispondente al vettore (x,y).
b- Che interpretazione geometrica dare nel caso in cui $\theta < 0$?
c- Si scriva la funzione da $\mathbf{R}^2$ in sé che corrisponde alla rotazione di un angolo $\frac{2}{3}\pi$ radianti in senso orario attorno all'origine.

Domanda 2 Dato $\theta \in (-\pi;\pi)$ si consideri la matrice $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in sé ad essa associata $\mathcal{S}(x,y) = S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & + & y\sin\theta \\ x\sin\theta & - & y\cos\theta \end{pmatrix}$.

Domanda 10 bis

Si mostri che essa descrive la riflessione, del punto corrispondente al vettore (x,y), rispetto alla retta che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo di $\frac{\theta}{2}$ radianti.

$\langle u \cdot v\rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$
$\Downarrow$
$\langle f(u)\cdot f(v)\rangle = \langle u \cdot v\rangle$

Domanda 3 a- Si mostri che le funzioni $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineari che conservano le distanze (*isometrie*), cioè: per ogni $u,\ v \in \mathbf{R}^2$ si abbia $||f(u) - f(v)|| = ||u - v||$, sono tutte e sole quelle la cui matrice associata $M \in \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ è del tipo $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, con $a^2 + b^2 = 1$.
b- Si mostri che che le funzioni $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineari iniettive che mantengono gli angoli (*conformi*), cioè: $\forall u,\ v \in \mathbf{R}^2$ si ha $\cos\left(\widehat{u0_{\mathbf{R}^2}v}\right) = \cos\left(\widehat{f(u)0_{\mathbf{R}^2}f(v)}\right)$, ovvero: $\frac{\langle f(u)\cdot f(v)\rangle}{||f(u)||\,||f(v)||} = \frac{\langle u\cdot v\rangle}{||u||\,||v||}$,

sono esattamente quelle la cui matrice associata è del tipo $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ e di rango massimo.
Il campo dei numeri complessi $\mathbf{C}$ è : sia uno spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbf{C}$ stesso, sia uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbf{R}$, di isomorfismo $\mathbf{R}$-lineare canonico con $\mathbf{R}^2$ dato da

$$c(x,y) = x + iy:$$

c- quali sono le matrici $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ a cui è associata una trasformazione $\mathbf{R}$-lineare $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (\phi(x,y), \psi(x,y)) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, per cui $c_\circ f_\circ c^{-1}: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sia $\mathbf{C}$-lineare (ovvero la moltiplicazione per un dato numero complesso) ?

Domanda 4 a- Si provi che le funzioni $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ che sono isometrie e lasciano fisso $0_{\mathbf{R}^n}$, cioè $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$, $x,\ y \in \mathbf{R}^n$, e $f(0_{\mathbf{R}^n}) = 0_{\mathbf{R}^n}$,
sono tutte e sole quelle che conservano il prodotto scalare, cioè $\langle f(x)\cdot f(y)\rangle = \langle x\cdot y\rangle$, $x,\ y \in \mathbf{R}^n$.
Teorema: le isometrie di $\mathbf{R}^n$ in sé che lasciano fissa l'origine di $\mathbf{R}^n$ sono funzioni lineari:
b- si provi nel caso $n = 2$ il teorema, cioè:

le isometrie di $\mathbf{R}^2$ che lasciano fisso $(0,0)$ sono funzioni lineari.

Domanda 5 Le funzioni $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tali che: 1) $f(tu) = tf(u)$, per ogni $t \in \mathbf{R}$ e $u \in \mathbf{R}^2$, e
2) trasformano coppie di rette parallele distinte in coppie di rette parallele distinte

sono tutte e sole le trasformazioni lineari iniettive (si tenga presente la regola del parallelogramma).

1.0 Le rotazioni attorno all'origine di $\mathbb{R}^2$ sono lineari

Domanda 1 Dato $\theta \in [0;+\infty)$ si consideri la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in sé ad essa associata $\mathcal{R}(x,y) = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & - & y\sin\theta \\ x\sin\theta & + & y\cos\theta \end{pmatrix}$.

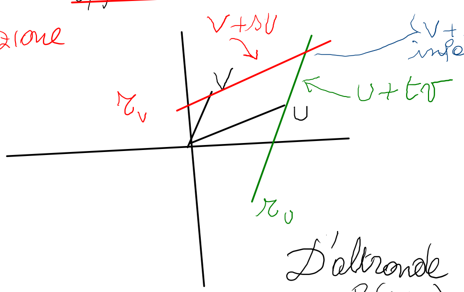
a- Si mostri che essa descrive la rotazione, in senso antiorario di un angolo di θ radianti, intorno a $(0,0)$, del punto corrispondente al vettore (x,y).
b- Che interpretazione geometrica dare nel caso in cui $\theta < 0$?
c- Si scriva la funzione da $\mathbf{R}^2$ in sé che corrisponde alla rotazione di un angolo $\frac{2}{3}\pi$ radianti in senso orario attorno all'origine.

1.0 Una rotazione R di $\mathbb{R}^2$ per un angolo ϑ attorno all'origine è lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

•) $R(0,0) = (0,0)$

••) $R(U+V) = R(U) + R(V)$ infatti una rotazione manda rette in rette e coppie di rette parallele in coppie di rette parallele: u, v indipendenti.

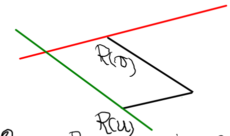
riscritto dopo esercitazione



$(V+sU) \cap (U+tv) = \{U+v\}$ (*)
infatti $v + su = u + tv$
$(1-t)v + (s-1)u = (0,0)$
$\Rightarrow 1 = t = s$

$R(r_v)$ è la retta per $R(v)$ e $R(U+V)$
$R(r_u)$ " " " $R(u)$ e $R(U+v)$

Poiché R è bijettiva
$R(r_v) \cap R(r_u) =$
$= R(r_v \cap r_u) = \{R(U+v)\}$



D'altronde $R(r_v)$ è parallela a $\sigma R(u)$ in quanto r_v lo è a su, e $R(su)$ è $\sigma R(u)$. Analogamente $R(r_u)$ è parallela a $\tau R(v) = R(tv)$ pertanto $R(r_v) = R(v) + \sigma R(u)$, $R(r_u) = R(u) + \tau R(v)$ quindi (*) $R(r_v) \cap R(r_u) = \{R(v) + R(u)\}$. %

Aggiunto dopo esercitazione

... $R(ut) = t R(u)$ $u = (0,0)$ ovvio. Si assume $u \neq (0,0)$

$R(Ut)$ come osservato è una retta passante per u e per $(0,0)$

quindi è del tipo

$$\tau R(u) \qquad \tau = \tau(t,u)$$

D'altronde le rotazioni conservano le distanze per cui

$$|t||u| = dist(tu,(0,0)) = dist(R(ut),(0,0)) = |R(ut)| = |\tau||Ru| = |\tau||U|$$

quindi $|t| = |\tau|$ ... non basta

Di più le rotazioni conservano gli angoli. ~~e quindi conservando le distanze conservano il prodotto scalare~~

$$t|u|^2 = \langle tu \cdot u \rangle = \langle R(tu) \cdot R(u) \rangle = \langle \tau R(u) \cdot R(u) \rangle$$
$$= \tau\, |R(u)|^2 =$$
$$= \tau\, |u|^2$$

Quindi $t = \tau$ ■

riscritto dopo esercitazione

OSSERVAZIONE

V e W spazi vettoriali

$* : V \times V \longrightarrow W$ bilineare (prodotto, distributivo) simmetrico (commutativo)

$$(A +_V B) * (A +_V B) = A*A +_W B*B +_W 2A*B$$

$$((A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB)$$

$$(A +_V B) * (A +_V B) = (A +_V B) * A +_W (A +_V B) * B =$$
$$= A*A +_W B*A +_W A*B +_W B*B =$$
$$= A*A + 2A*B +_W B*B \;\blacksquare$$

Lemma (identità di polarizzazione)

$$\langle u \cdot v \rangle = \frac{|u+v|^2 - |u-v|^2}{4}$$

DIM $|u+v|^2 = \langle (u+v) \cdot (u+v) \rangle = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u \cdot v \rangle$
$|u-v|^2 = \langle (u-v) \cdot (u-v) \rangle = |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u \cdot v \rangle$

$$\frac{|u+v|^2 - |u-v|^2}{4} = \frac{2\langle u \cdot v \rangle - (-2\langle u \cdot v \rangle)}{4} = \langle u \cdot v \rangle$$

Corollario: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare, che conserva le distanze ($|u-v| = dist(u,v) = dist(f(u), f(v)) = |f(u) - f(v)| = |f(u-v)|$) allora conserva il prodotto scalare $\langle u \cdot v \rangle = \langle f(u) \cdot f(v) \rangle$.

DIM $\langle f(u) \cdot f(v) \rangle = \frac{|f(u) + f(v)|^2 - |f(u) - f(v)|^2}{4} \underset{\text{LINEARE}}{=} \frac{|f(u+v)|^2 - |f(u-v)|^2}{4} =$
$$= \frac{|u+v|^2 - |u-v|^2}{4} = \langle u \cdot v \rangle \;\blacksquare$$

1.0 Le rotazioni attorno all'origine su $\mathbb{K}$ sono lineari

Domanda 1 Dato $\theta \in [0; +\infty)$ si consideri la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in sé ad essa associata $\mathcal{R}(x, y) = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & - & y\sin\theta \\ x\sin\theta & + & y\cos\theta \end{pmatrix}$.

a- Si mostri che essa descrive la rotazione, in senso antiorario di un angolo di θ radianti, intorno a $(0, 0)$, del punto corrispondente al vettore (x, y).
b- Che interpretazione geometrica dare nel caso in cui $\theta < 0$?
c- Si scriva la funzione da $\mathbf{R}^2$ in sé che corrisponde alla rotazione di un angolo $\frac{2}{3}\pi$ radianti in senso orario attorno all'origine.

messo in bella dopo l'esercitazione

a) Visto che le rotazioni attorno all'origine (R_θ $\theta \geq 0$ in senso antiorario, $\theta \leq 0$ in senso orario) sono endomorfismi lineari avranno ognuna una matrice associata relativa alla base canonica sia su $\mathbb{R}^2$ come dominio che su $\mathbb{R}^2$ come codominio:

Come si associa fissate le basi $(b_i)_{i\leq n}$, $(\beta_i)_{i\leq m}$ di V e W alla funzione lineare $F: V \to W$ una matrice M_F?

Se si pensa al viceversa viene in mente come operare

data una matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 2×2

ad essa si associa la funzione lineare

$f_A : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ $\quad f(x,y) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$ ./.

Quindi la prima colonna di A : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = f_A(1,0) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

" seconda " " : $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = f_A(0,1) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Volendo che la funzione lineare f_A, associata ad una matrice A a sua volta associata ad una funzione lineare F $(A = M_F)$, sia uguale ad F :

$$F(x,y) = f_A(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \| \text{ PRODOTTO RIGHE PER COLONNE}$$

$$xF(1,0) + yF(0,1) \qquad\qquad xM_F^1 + yM_F^2$$

$$\begin{tikzcd}
V,(b_i) \arrow[r, "F"] & W,(\beta_i) \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R}^n\ e_i^{\mathbb{R}^n} \arrow[u, "\varphi^{-1}"] \arrow[r, "M_F"] & \mathbb{R}^m\ e_i^{\mathbb{R}^m}
\end{tikzcd}$$

$\varphi^{-1}(e_i) = b_i$

$\varphi(b_i) = e_i^{\mathbb{R}^n}$

$\psi(\beta_i) = e_i^{\mathbb{R}^m}$

In generale data $F : V \to W$ lineare $(b_i)_{i \le n}$ base di V, $(\beta_i)_{i \le m}$ base di W la matrice associata ad F è quella m righe, n colonne che ha come colonne, j^a, $j \le n$, le m-ple delle coordinate nella base (β_i) del vettore $F(b_j) \in W$

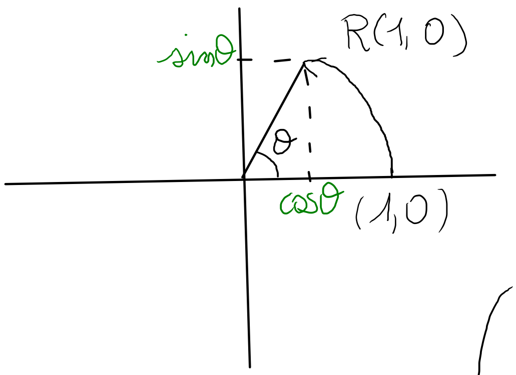
$$\psi(F(x_1 b_1 + \dots + x_n b_n)) = M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 M^1 + \dots + x_n M^n =$$

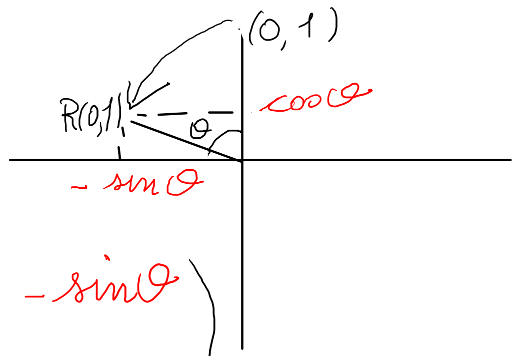
$$= x_1(M_1^1 \beta_1 + \dots + M_m^1 \beta_m) + \dots + x_n(M_1^n \beta_1 + \dots + M_m^n \beta_m)$$

%

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^2_{e_i} & \xrightarrow{R} & \mathbb{R}^2_{e_i} \\
\updownarrow \scriptstyle{id} & & \updownarrow \scriptstyle{id} \\
\mathbb{R}^2_{e_i} & \xrightarrow{M_R} & \mathbb{R}^2_{e_i}
\end{array}$$

Pertanto data la rotazione
$R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ attorno all'origine
in senso antiorario di un angolo ϑ
la matrice associata M_R
è quella che ha come
prima colonna il RUOTATO DI $(1,0)$
seconda " " DI $(0,1)$





$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Domanda 10 bis Si consideri la trasformazione lineare, da $\mathbb{R}^2$ in sé, data dalla rotazione in senso antiorario intorno all'origine di una angolo di $\frac{\pi}{4}$. Se ne scriva la matrice associata nella base $((1,1),(2,1))$.

messo in bella dopo l'esercitazione (corretto un errore di calcolo)

1) La matrice associata a tale rotazione, rispetto alla base canonica, è per quanto visto

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = A$$

$$\underbrace{A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{COORDINATE NELLA BASE CANONICA DI } P=(x,y)} = \text{COORDINATE NELLA BASE CANONICA DI } RP = \begin{pmatrix} x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} \\ x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2) Si denoti $(1,1)$ con u e $(1,2)$ con v, $\mathcal{B}$ sia la base (u,v).
Si vuole trovare M per cui

$$M \text{ coordinate in } \mathcal{B} \text{ di } (x,y) = \text{coordinate in } \mathcal{B} \text{ di } R(x,y)$$

3) Ora la matrice che ha le coordinate canoniche di u e v rispettivamente come prima e seconda colonna è $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: prodotto righe per colonne $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono le coord. in $\mathcal{B}$ di u, e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ quelle in $\mathcal{B}$ di v %

quindi la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
trasforma le coordinate in $\mathcal{B}$ in
quelle nella base canonica

$$(x, y) = a(1,1) + b(2,1) = (a+2b, a+b)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

In generale la matrice che ha
come colonne le coordinate
in una prima base degli elementi
di una seconda base $\mathcal{B}$
trasforma le coordinate in $\mathcal{B}$
in quelle della prima base.

---

4) La matrice inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
all'opposto trasforma le coordinate
nella base canonica in quelle in $\mathcal{B}$:
le sue colonne saranno le coordinate
in $\mathcal{B}$ degli elementi della base canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

CIOÈ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ./.

si hanno i due sistemi

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma + 2\delta = \\ \gamma + \delta = 1 \end{cases}$$

I-II $\beta = 1$ I-II $\delta = -1$

II $\alpha = -1$ II $\gamma = 2$

pertanto $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

---

5) Tornando al punto 2) si cerca

M per cui M COORDINATE IN $\mathcal{B}$ DI P = COORDINATE IN $\mathcal{B}$ DI RP

per 1) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ COORDINATE IN ~~BASE~~ CANONICA DI P = COORDINATE IN BASE CANONICA DI RP

quindi $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ COOR. IN BASE $\mathcal{B}$ DI P = COOR. IN BASE CANONICA DI RP

quindi $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{}$ COOR. IN BASE $\mathcal{B}$ DI P = COOR. IN BASE $\mathcal{B}$ DI RP

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ è la matrice cercata ■