Lezione del 7 dicembre

1) Teorema di Cauchy Binet
(determinante del prodotto)

A, B matrici quadrate di eguale dimensione n

$$\det_n(A \cdot B) = \det_n A \cdot \det_n B$$

<u>DIM</u> 1) caso B non ha rango massimo

1.1 se e solo se $\det B = 0$: infatti, se riduco a scala B con S il valore assoluto del det. non cambia, procedendo con mosse di Gauss all'indietro mi riduco ad una matrice diagonale che sulla diagonale ho qualche 0 perché le mosse di Gauss conservano il rango e $\operatorname{rang} B < n$

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \overset{?}{=} d_1 \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & d_n \end{bmatrix}$$

per linearità (omogeneità) per righe

$$\overset{\text{indut.}}{=} d_1 \cdot d_2 \det\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & d_3 & \\ & & & \ddots \; d_n \end{bmatrix} = d_1 \cdots d_n \det I_d$$

$$= d_1 \cdots d_n$$

$$|\det B| = \left|\det\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}\right| \overset{\Leftarrow}{=} 0$$

$\exists i \; d_i = 0$

rang $d_1 \ldots d_n$

$\shortparallel$

rango $B < n$

1.2 $\det B = 0$

$\Updownarrow$

B non ha rango massimo

$\Updownarrow$

$\underline{\ker B \neq (0_{\mathbb{R}^n})}$

rango $A \cdot B \overset{?}{<} n$ $\quad \det AB = 0 =$

$\shortparallel$

$\dim \operatorname{Im} A \cdot B$

$= \det A \cdot 0$

$= \det A \cdot \det B$

$\operatorname{Im} AB \subseteq \operatorname{Im} A$

$\underline{\ker AB} \supseteq \ker B \neq (0)$

2) B rango massimo se solo se $\det B \neq 0$

$$\Lambda(A) = \frac{\det(AB)}{\det B} \overset{?}{=} \det A$$

Proviamo per Λ le tre proprietà che caratterizzerebbero il determinante

. $$\Lambda(Id) = \frac{\det(Id\, B)}{\det B} \overset{IdB=B}{=} \frac{\det B}{\det B} = 1$$

.. $$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_n B \end{pmatrix}$$

supponiamo $A_h = A_i$ $h \neq i$

$(AB)_h = A_h B = A_i B = (AB)_i$ quindi anche AB ha due righe eguali per cui $\det AB = 0$

$$\Lambda(AB) = \frac{0}{\det B} = 0$$

%

$\therefore$ Supponiamo che $A_i = \lambda H + \mu K$ $\quad H = (H^1 \dots H^n)$, $K = (K^1 \dots K^n)$

$$AB = \begin{pmatrix} \vdots \\ \hline (\lambda H + \mu K) B \\ \hline \vdots \end{pmatrix} \quad \text{1ª riga} \qquad (AB)_i = (\lambda H + \mu K) B = \lambda HB + \mu KB$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots \\ \hline \lambda HB + \mu KB \\ \hline \vdots \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} A_j B & j \neq i \\ \hline HB & \to i^o \\ \hline A_\ell B & \ell \neq i \end{array} = \begin{pmatrix} A_j \\ \hline H \\ \hline A_\ell \end{pmatrix} B \qquad H_{1\times n} B_{n\times n} = HB_{1\times n}$$

$$\det AB = \lambda \det \begin{pmatrix} A_j B & j \neq i \\ \hline HB \\ \hline \vdots \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} A_j B & j \neq i \\ \hline KB \\ \hline \vdots \end{pmatrix}, \quad \text{divido per } \det B:$$

$$\Lambda(A) = \lambda \, \Lambda \begin{pmatrix} A_j & j \neq i \\ \hline H & i^o \\ \hline A_\ell & \ell \neq i \end{pmatrix} + \mu \Lambda \begin{pmatrix} A_j & j \neq i \\ \hline K & i^o \\ \hline A_\ell & \ell \neq i \end{pmatrix}$$

QUINDI PER UNICITÀ DEL DETERMINANTE $\Lambda = \det$

$\Lambda(A) = \det A$ quindi $\dfrac{\det(AB)}{\det B} = \det A$ $\blacksquare$

COROLLARIO. $\det S^{-1} = \dfrac{1}{\det S}$:

$$1 = \det Id = \det(SS^{-1}) \overset{\text{Binet}}{=} (\det S)\det(S^{-1})$$

$$\det(S^{-1}) = (\det S)^{-1}$$

- Due matrici simili hanno egual determinante

$$M = S^{-1} N S$$

$$\det M = \cancel{(\det S)^{-1}} \det N \cancel{\det S} = \det N \quad ■$$

NOTA (aggiunta dopo la lezione)

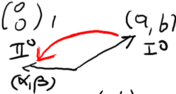
- se M è simile all'identità è l'identità: $M = S^{-1} Id\, S = S^{-1}S = Id$ (cfr. FIVd.17bis-a)
- $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ non è l'identità $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ quindi non è simile all'identità pur avendo lo stesso determinante

Fine lezione

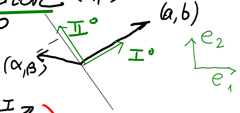
discorso intuitivo che mette in relazione l'area orientata di un parallelogramma con il determinante

$$\det\begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix} = \begin{cases} \text{area del parallelogramma di vertici } \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a+\alpha\\b+\beta\end{pmatrix} & \text{se } (1) \\ - \quad '' \qquad '' \qquad '' & \text{se } (2) \end{cases}$$

(1) il primo vettore si allinea al secondo seguendo l'angolo convesso, di vertice $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, tra i due con una rotazione in senso antiorario



equivalentemente il versore del primo vettore e il versore della proi. ortog. del secondo sull'ortogonale al primo sono un ruotato della base canonica $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$



(2) la rotazione del primo sul secondo seguendo l'angolo convesso è in senso orario
equivalentemente i versori del primo e della proi. ort. del secondo sull'ortogonale al primo sono il ruotato di un riflesso della base canonica
per es. $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ riflesso della base canonica risp. alla bisettrice