Esercitazione 13, 15 dicembre

F IV

I

Domanda 13 Si considerino in $\mathbf{R}^3$ i sottospazi H e K di equazioni rispettivamente $x+y-z=0$ e $\begin{cases} x-y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$

~~a~~- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(H)=0$ e $\underline{f(\mathbf{R}^3)=K}$.

~~b~~- Dire se esiste $g:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $\underline{g \circ f}=0$ dove f è una applicazione lineare non nulla verificante le ipotesi del punto precedente. $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$ $\quad K \subseteq \operatorname{Ker} g$ $\quad k_1 \dots k_m$ base di V $\; g(k_i)=\underline{0}$

c- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $g:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g(K) \subset H$ e $g(H) \subset K$. VISTO CHE $K = H^\perp$ $\quad g(h_1)=g(h_2)=0_{\mathbb{R}^3}$ $\quad g(1,1,-1)=h_1=(1\,-1\,0)$

LA MATRICE ASSOCIATA NELLA BASE h_1, h_2, J_1 $\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$

completamento a base di $v_1 \dots v_m$ indip con $v_1 \dots v_{m-m}$ vuol dire trovare come addendo diretto di $\operatorname{span}(v_1 \dots v_m)$ il sottospazio $\operatorname{span}(v_1 \dots v_{m-m})$

• H soluzioni di $x+y-z=0$ $\qquad$ K soluzioni di $\begin{cases} x-y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ $\quad x(1,1,-1)$

$\dim H = n-1 \overset{n=3}{=} 2$ $\qquad \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{matrix}$ $\quad \dim K = n - \#\text{pivot} = 3-2=1$

a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare $\;{}^{*}\,\underline{f(H)=0_{\mathbb{R}^3}}$ $\;\underline{\operatorname{Im} f = K}\;{}^{**}$

$\underline{H \subseteq \operatorname{Ker} f}$

• argomento generale per dire che esiste: cosa bisogna dare per definire una trasformazione lineare $g: V \to W$ basta definire i suoi valori su una base di V.

TROVO J t.c. $\mathbb{R}^3 = H \oplus J$ $\quad h_1 \dots h_2$ base di H $\quad J_1 \dots J_{n-r}$ base di J

$h_1 \dots h_n\, J_1 \dots J_{n-r}$ è base di $\mathbb{R}^3$ e definisco $\underline{f(h_i)=0_{\mathbb{R}^3}}$ $\quad f(J_l) \in K$

garantisce *

però ciò non basta per avere ** cioè la surgettività su K $\qquad f(\mathbb{R}^3)=f(H \oplus J)=f(J) \overset{?}{=} K$

$f(J) = \{\lambda_1 f(J_1) + \dots + \lambda_{n-r} f(J_{n-r}) = f(\lambda_1 J_1 + \dots + \lambda_{n-r} J_{n-r}) : \lambda_1 \dots \lambda_{n-r} \in \mathbb{R}\}$

$=K$ $\qquad$ generico elemento di J

devo imporre non solo $f(J_l) \in K$ ma $f(J_1), \dots, f(J_{n-r})$ generatori di K

quando ciò è possibile? se e solo se $\dim K \le n-r$

IN UNO SPAZIO VETTORIALE V LE COORDINATE IN UNA BASE di V $(b_i)_{i \in I}$ DI UN VETTORE $v \in V$ sono i coefficienti dell'unica combinazione lineare dei (b_i) che dà v $\quad v = \sum \lambda_i b_i$ $\quad X_v^{(b_i)} = (\dots \lambda_i \dots)$

• $\dim H = 2 = r$ $\qquad \dim K = 1 = 3-r = $ si può

base di H $\quad \underline{x+y-z=0}$ $\quad (1,-1,0),\ (1\,0\,1)$

$f(1,-1,0) = (0\,0\,0) \quad f(1\,0\,1) = (0\,0\,0)$

trovare un addendo diretto di H in $\mathbb{R}^n$ dato H stsp $\dim H < n$ un addendo diretto è $H^\perp$: $\mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$ e una sua base sono i coeff. delle eqz. che def. H

$J = \mathbb{R}(1\,1\,-1)$

$f(1,1,-1) = (1\,1\,-1) \in K$

• Nella base $\begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & J_1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$ di $\mathbb{R}^3$ la matrice associata ad f è $\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$

nella base canonica la matrice associata $\begin{pmatrix} 1&1&1\\-1&0&1\\0&1&-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1\\-1&0&1\\0&1&-1 \end{pmatrix}^{-1}$

$f(h_1)=\underline{0}$ $\quad f(h_2)=0$

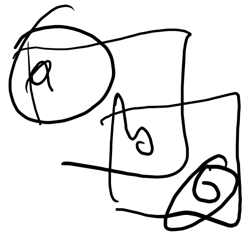
h_1 che coordinate ha nella base $h_1\, h_2\, J_1$ $\quad h_1 = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 J_1$

$\mathrm{tr} M = \cos\vartheta + \cos\theta + 1$

$$\frac{a+\beta+C-1}{2} := \cos\theta$$

COEFFICIENTI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

$\det(A-\lambda I) = \dots$



$$\begin{matrix} a-\lambda & & \\ & b-\lambda & \\ & & c-\lambda \end{matrix}$$

$(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$

$(ab-\lambda a-\lambda b+\lambda^2)(c-\lambda)$

$$-\lambda^3 + \boxed{\mathrm{tr}\,A}\,\lambda^2 - \underbrace{(ac+bc+ab)}_{\sum \det \text{ MINORI DIAG } 2\times 2}\lambda + \underbrace{abc}_{\det A}$$

Quindi se

$$M = \begin{matrix} a & \alpha & A \\ b & \beta & B \\ c & \gamma & C \end{matrix}$$

è una rotazione

$f_1\ f_2\ f_3$ base ortonorm

$f_3 \to$ asse di rot.

$f_1 f_2 \to$ base $f_3^{\perp}$

$$M = \underbrace{(f_1\ f_2\ f_3)}_{\text{matrice ortogonale}} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t f_1 \\ {}^t f_2 \\ {}^t f_3 \end{pmatrix}$$

F IV

I bis

Domanda 17 bis a- Se una matrice quadrata M è *simile* alla matrice identica ($Id = S^{-1} M\, S$) allora è *uguale* alla matrice identica.

b- Le matrici $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.

c-Le matrici $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.

d- Le mosse di Gauss (sostituzione con somma di multplo di un'altra riga e permutazione di righe) non trasformano una matrice in una simile.

a) $\lambda Id = S M S^{-1}$ molt a sx S^{-1} e a dx S.

$\lambda I = S^{-1} \lambda I S = M$

b) ovvio per il punto a)

c) $\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}$ $\quad$ $\begin{matrix}1&1\\0&-1\end{matrix}$

hanno lo stesso rango quindi la seconda è ridotta di Gauss della prima $(II - I \to II)$

non sono simili

come provarlo artigianalmente

sono simili se e solo rappresentano la stessa applicazione lineare in basi diverse

$L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ se fossero simili

coord in f_1 f_2

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$$

coord in $(1,0)\ (0,1)$ e_1 e_2

$f_1 = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = a e_1 + b e_2$ $\quad$ $L f_1 = f_1 = \begin{matrix}a\\b\end{matrix}$ $\quad$ $L f_1 = a L e_1 + b L e_2 = \begin{pmatrix}a+b\\a\end{pmatrix}$

$f_2 = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = c e_1 + d e_2$ $\quad$ $L f_2 = f_1 - f_2 =$ $\quad$ $L f_2 = c L e_1 + d L e_2 = \begin{pmatrix}c+d\\c\end{pmatrix}$

$\begin{matrix}a = a+b\\ b = a\end{matrix} \Rightarrow a = 2a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 0$

$\begin{matrix}a\\b\end{matrix}$ f_1 non può essere l'elemento di una base

Domanda 9 Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.
Se vi sono $a \neq b$ in $\mathbb{K}$, per cui $(A - aI_{n\times n})(A - bI_{n\times n}) = O_{n\times n}$, allora:

$$\mathbb{K}^n = Ker(A - aI_{n\times n}) \oplus Ker(A - bI_{n\times n}) \text{ e } Ker(A - aI_{n\times n}) = Im(A - bI_{n\times n})$$

II

In generale se $P(x)$ è un polinomio con radici semplici $P(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - a_i)$ $a_i \neq a_j$ $i \neq j$ e $P(A) = O_{n\times n}$, $\prod_{i \neq j}(A - a_i I) \neq 0$

gli autovalori di A sono ~~tra~~ gli a_i

allora A è diagonalizzabile → cioè K^n somma diretta degli autospazi di A

$P(x) = (x - a)(x - b)$ $a \neq b$

$P(A) = O_{n\times n}$ $(A - aI)(A - bI) = 0$ ☆

$Ker(A - aI)$ = autospazio di a come autovalore di A

$Ker(A - bI)$ = " b "

- $Ker(A - aI) \cap Ker(A - bI) = (0) \longrightarrow \dim \cap = 0$

☆ $Im(A - bI) \subseteq Ker(A - aI)$

$\dim$

$n - \dim Ker(A - bI) \leq \dim Ker(A - aI)$

$n \leq \dim K(A - bI) + \dim Ker(A - aI) \overset{\text{grass.}}{=}$

$= \dim[Ker(A - bI) + Ker(A - aI)] \leq n$

Domanda 7 (Esercizio 1 del sesto appello 24 Luglio 2018) Sia A una matrice reale $n \times n$ per cui

$$A^2 - 4A + 3I = O$$

ove I è la matrice identica $n \times n$ e O quella nulla.

a- Calcolare gli autovalori reali e complessi di A.

b- Dimostrare che A è diagonalizzabile.

III

$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

autov. di $A \subseteq \{1, 3\}$

- A può essere $3I_d \to$ solo autov. 3
  " " $I_d \to$ solo aut 1
- altrimenti li ho tutti e due
  $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(A-I) \oplus \operatorname{Ker}(A-3I)$

Esercizio se $T = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & & * \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}$

è triangolare superiore allora

$$\det T = \prod_{i=1}^{n} d_i \, .$$

IV

IV

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quinto foglio di esercizi
Domande di introduzione

0 **Domanda 1** Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

0 **Domanda 2** a- Calcolare $\det\begin{pmatrix} a & b & 3 & 4 \\ c & d & 6 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$. $= \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

Provare le seguenti identità

b- $\det\begin{pmatrix} A_{h\times h} & B_{h\times(n-h)} \\ \mathrm{O}_{(n-h)\times h} & D_{(n-h)\times(n-h)} \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D.$

15/12

c- $\det\begin{pmatrix} \boxed{A^1_{h_1\times h_1}} & B_{h_1\times h_2} & \dots & B_{h_1\times h_k} \\ \mathrm{O}_{h_2\times h_1} & \boxed{A^2_{h_2\times h_2}} & \dots & B_{h_2\times h_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{O}_{h_k\times h_1} & \mathrm{O}_{h_k\times h_2} & \dots & \boxed{A^k_{h_k\times h_k}} \end{pmatrix} = \det A^1 \cdot \ldots \cdot \det A^k$, con $h_1 + \cdots + h_k = n$.

- se rango $A < n$ almeno una A^i ha rango $A^i < h_i$ e quindi è vera la formula
- se rango $A = n$ $\Rightarrow$ rang $A^i = h_i$ infatti: metto ogni A^i in forma triang sup con Gauss T^i ma così ho messo in forma triang sup A una certa T

$T = \begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_k \end{pmatrix}$ TUTTI GLI ELEMENTI DIAGONALI SONO NON NULLI

Domanda 3 Siano $M = (M^1|\dots|M^n) \in \mathcal{M}(n,n,\mathbf{K})$, $x = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{K}^n$, $b = {}^t(b_1,\dots,b_n) \in \mathbf{K}^n$ per cui $Mx = b$.
a- (Cramer) Si provi, utilizzando il fatto che $b = x_1M^1 + \cdots + x_nM^n$, e calcolando il determinante della matrice $M[b/M^i]$, ottenuta da M sostituendo b alla i^a colonna di M

$$x_i = \frac{\det M[b/M^i]}{\det M}.$$

b- Se M è invertibile allora per l'elemento di riga i^a e colonna j^a della matrice inversa vale la formula:

$$(M^{-1})^j_i = \frac{1}{\det M}(-1)^{i+j}\det M^{i}_{j}$$

ove M^{i}_{j} è la matrice $(n-1)\times(n-1)$, ottenuta da M cancellando la j^a *riga* e la i^a *colonna.*

Domanda 4 (Determinante di Vandermonde: cfr. domanda 9 del terzo foglio di esercizi).

a- Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbf{C}$.

numero di scambi totali

$$\det A = (-1)^{\sum n_i} \det T = \prod \det T_i \cdot (-1)^{n_i} = \prod \det A^i$$

n_i: numero di scambi per la i-esima "striscia"

Esercizio 2 Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$.

a- Per quali $a \in \mathbf{R}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$?

b- Per quali $a \in \mathbf{R}$ è triangolabile su $\mathbf{R}$?

c- Per quali $a \in \mathbf{C}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{C}$?

V

DA FARE A CASA

E CON UN RICEVIMI