Esercitazione 14, Recupero

19 dicembre

Esercizio 2 Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$.

a- Per quali $a \in \mathbf{R}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$?

b- Per quali $a \in \mathbf{R}$ è triangolabile su $\mathbf{R}$?

c- Per quali $a \in \mathbf{C}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{C}$?

V

a) come si dice solo con le matrici direttamente $A = S \text{ Diagonale } S^{-1}$

in astratto $f\ V \to V$ è diagonalizz. $\Leftrightarrow$ c'è una base di V di autovettori $(v_i) = \mathcal{B}$

$f(v_i) = \lambda_i v_i$

$\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \text{ autovalore}} \mathrm{Ker}(f - \lambda id)$

$M^{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix}$

Pol. caratt. $\det(A - \lambda I) =$

$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a-\lambda \end{pmatrix} = [(1-\lambda)^2 - 1] \cdot [(1-\lambda)(a-\lambda) + 1]$

$= [\lambda^2 - 2\lambda][a - \lambda - \lambda a + \lambda^2 + 1] = \lambda(\lambda - 2)[\lambda^2 - (1+a)\lambda + 1 + a] =$

$= \lambda(\lambda-2)(\lambda - \lambda_1(a))(\lambda - \lambda_2(a))$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 + a$

$\lambda_1 \lambda_2 = 1 + a$

per avere la diagonalizzabilità è necessario avere tutti gli autovalori reali devo imporre $a^2 - 2a - 3 \geq 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{1 + a \pm \sqrt{1 + a^2 + 2a - 4 - 4a}}{2}$

$= \frac{1 + a \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2}$

$\frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = 1 \pm \frac{\cancel{2}\sqrt{1+3}}{\cancel{2}} = 1 \pm 2$

$\Updownarrow$

$a \geq 3$

$a \leq -1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Pol car} = \lambda(\lambda-2)\Big(\lambda - \underbrace{\tfrac{1+a+\sqrt{a^2-2a-3}}{2}}_{\lambda_1(a)}\Big)\Big(\lambda - \underbrace{\tfrac{1+a-\sqrt{a^2-2a-3}}{2}}_{\lambda_2(a)}\Big)$$

condiz. necessaria affinché sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ è che $a \leq -1$ o $a \geq 3$

I) Se $a = -1$ vi sono almeno 2 autovalori coincidenti

$\text{Pol car} = \lambda(\lambda-2)\lambda^2 = \lambda^3$ $\qquad \lambda_1(-1) = \lambda_2(-1) = 0$

$\text{molt alg}(0) = 3 \overset{?}{=} \dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} V_0$

noi sappiamo calcolare il rango di A cioè $\dim \operatorname{Im} A$ e per il teorema dimensione anche $\dim \operatorname{Ker} A$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} \cancel{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

$\dim \operatorname{Ker} A(-1) = 1$

NON È DIAG.

$\text{Pol car } A = \text{Pol car } SAS^{-1}$

$\text{Pol car}(A-\lambda I) = \text{Pol car}(S(A-\lambda I)S^{-1})$

la molt alg. di λ_0 per A = la molt alg. di λ_0 $S(A-\lambda I)S^{-1}$

$$S(A-\lambda I)S^{-1} = SAS^{-1} - \lambda I = $$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11}-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{44}-\lambda \end{bmatrix}}_{\text{Diagonale}} = \prod (d_{ii} - \lambda)$$

sulla diagonale di D λ_0 deve comparire esattamente n_0 volte

$$\text{Pol car } A = (\lambda-\lambda_0)^{n_0} \cdot Q$$

Q non divisibile per $(\lambda - \lambda_0)$

II $a = 3$ $\qquad \lambda_1(3) = \lambda_2(3) = 2$

$\text{Pol car} = \lambda(\lambda-2)^3$

$$\operatorname{rk}(A - 2I) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rk}\begin{matrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix} = \operatorname{rk}\begin{matrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{matrix} = 3$$

COME SOPRA NON È DIAG PER $a=3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

II $a<-1$ o $a>3 \longrightarrow \lambda_1(a) \neq \lambda_2(a)$

$$\text{Pol car} = \underline{\lambda}(\lambda-2)\left(\lambda - \frac{a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2}\right)$$

bisogna vedere se per qualche $a<-1$ o $a>3$

$$\frac{a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2} = 0 \quad \text{o} \quad 2$$

$$\frac{a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2} = 0 \quad \text{o} \quad 2$$

NOTA: poiché $0 \neq 2$ e $a<-1$ o $a>3$ comporta $\lambda_1(a) \neq \lambda_2(a)$

al più nel caso $m_{a}(0) \leq 2$ $\quad m_a(2) \leq 2$

$a+1 \pm \sqrt{a^2-2a-3} = 0$, $a+1 \pm \sqrt{a^2-2a-3} = 4$

$a+1 = \mp\sqrt{a^2-2a-3}$, $a-3 = \mp\sqrt{a^2-2a-3}$

$a>3 \Rightarrow 0 < a+1 = \sqrt{a^2-2a-3}$

$\cancel{a^2}+1+2a = \cancel{a^2}-2a-3$

$4a = -4 \quad a=-1 \not> 3$

$\Downarrow$

0 ha molt 1

$\Rightarrow a-3>0 \quad a-3 = \sqrt{a^2-2a-3}$

$a>3$

$\cancel{a^2}+9-6a = \cancel{a^2}-2a-3$

$12 = 4a \quad 3 = a > 3$

$\Downarrow$

2 ha molt 1

$a>3$ ci sono 4 radici distinte è diagonalizz.

$a<-1$ $\quad 0 > a+1 = -\sqrt{a^2-2a-3}$

$\cancel{a^2}+1+2a = \cancel{a^2}-2a-3$

$4a = -4 \Rightarrow a=-1$

$a<-1, \; -4 > a-3 = -\sqrt{a^2-2a-3}$

$\cancel{a^2}+9-6a = \cancel{a^2}-2a-3$

$12 = 4a \Rightarrow a = 3 \not< -1$

$a<-1$ ci sono 4 radici dist. è diagonalizz.

b) risposta $a \leq -1$ o $b \geq 3$

$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

c)

$$Pol = \lambda(\lambda-2)(\lambda-\lambda_1(a))(\lambda-\overline{\lambda_1(a)})$$

CASO reale

- nei casi $a < -1$ $b > 3$
  è diag su $\mathbb{R}$

- nei casi $a = -1$ o $a = 3$
  comunque molt. alg $\neq$ molt geom
  non è diag.

- $-1 < a < 3$ $\lambda_1(a)$ non può essere reale
  $\lambda_1(a) \neq \overline{\lambda_1(a)}$
  $\lambda_1, \overline{\lambda_1} \neq 0, 2$

è diagon. su $\mathbb{C}$
perché ha 4 autov. distinti

Se ho un polinomio P
a coff. reali
è $\alpha = u + iv$ è una radice
$P(u+iv) = 0$
anche $\overline{\alpha} = u - iv$
è una radice

$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$0 = P(\alpha) = \overline{0} = \overline{P(\alpha)}$

$= \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \dots + \overline{a_n}\,\overline{\alpha}^n$

$= a_0 + a_1 \overline{\alpha} + \dots + a_n \overline{\alpha}^n$

$x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$

Esercizio 1

$\langle \underline{x} \cdot (1\,1\,1\,1) \rangle = 0$

IV bis

Sia P il piano di $\mathbb{R}^4$ di equazioni $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

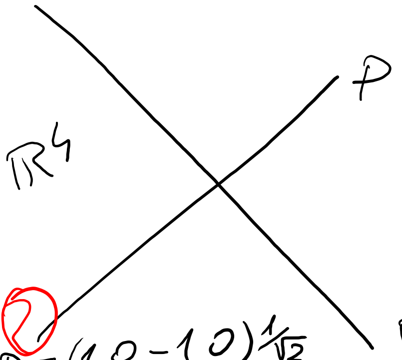
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{matrix}$

$\dim P = 2$

- Determinare una applicazione lineare, cioè una matrice $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Ker} A = P$ e $\underline{\operatorname{Im} A = P}$.
- Dimostrare che $A^2 = AA = 0_{4\times 4}$.

$\dim P^\perp = 2 \qquad P^\perp = \operatorname{span}\,(1, 1, 1, 1)\ (1\ -1\ 1\ -1)$

$\sim (0\,2\,0\,2)$



P un addendo diretto V di P es. $P^\perp$

base di P | base dell'addendo

$(p_1, p_2 \mid v_1\ v_2)$

2

$p_1 = (1\ 0\ -1\ 0)\frac{1}{\sqrt 2}$

$p_2 = (0\ 1\ 0\ -1)\frac{1}{\sqrt 2}$

$v_1 = (1\,1\,1\,1)\frac12$

$v_2\,(1\ -1\ 1\ -1)\frac12$

base ortonormale di $\mathbb{R}^4$

$\mathbb{R}^4 = P \oplus V$

$p_1\ p_2\ v_1\ v_2$ è base di $\mathbb{R}^4$

1

$A p_1 = \underline{0}$

$A p_2 = 0$

$A v_1 \in P \setminus \underline{0}$

$A v_2 \in P \setminus \underline{0}$

devono generare P

$A v_1 = p_1$

$A v_2 = p_2$

IN TALE BASE $(p_1 p_2 v_1 v_2)$ DI $\mathbb{R}^4$ A ha matrice associata

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

L'APPLICAZIONE LINEARE SCELTA nella base canonica è

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & 0 & -1/\sqrt2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt2 & 0 & -1/\sqrt2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$P^2 - P = 0$

$P^2 = P$

$\Updownarrow$

P è una proiezione se $V = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$

viceversa $V = A \oplus B$

$v = a + b$ $\exists!\, a \in A$, $b \in B$

$v \xrightarrow{P} a$ sono lineari

$v \xrightarrow{I-P} b$

$\operatorname{Ker} P = B$

$\operatorname{Im} P = A$

${}^tPx = 0 \iff x \in \operatorname{Ker} {}^tP$

$\langle {}^tPx \cdot y \rangle = 0 \ \forall y$

$\iff \langle x \cdot Py \rangle = 0 \ \forall y$

$x \in (\operatorname{Im} P)^\perp$

FIV

VI

c-Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.

d- Le mosse di Gauss (sostituzione con somma di multplo di un'altra riga e permutazione di righe) non trasformano una matrice in una simile.

Domanda 18 Sia $A \in \mathcal{M}(n,n,\mathbf{C})$ tale che $A^k = O_{n\times n}$ per qualche $k \in \mathbf{N}$: mostrare che per ogni $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ la matrice $\lambda Id_{n\times n} - A$ è invertibile.

19/12

Domanda 19 a- Dato uno spazio vettoriale U, mostrare che tutte e sole le proiezioni P su un sottospazio di U sono le applicazioni lineari da U in sé, per cui $P^2 - P = O$.
b- Si rammenti che data $A \in \mathcal{M}(n,n,\mathbf{R})$ si ha $\langle Ax \cdot y\rangle = \langle x \cdot {}^tAy\rangle$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$:
Si mostri che tutte le proiezioni ortogonali su un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ sono quelle per cui $P^2 - P = O_{n\times n}$ e $P = {}^tP$.

Domanda 20 Per $t \in \mathbf{R}$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & t \end{pmatrix}$, e si consideri $M_A : \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R}) \to \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ data da $M_A(B) = AB = (AB^1|AB^2)$ ove B^1, B^2 son la prima e seconda colonna di B.
a- Si provi che M_A è lineare. b- Al variare di t si determinino l'immagine e il nucleo di M_A.

Domanda 21 Sia $D : \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ l'operatore lineare di derivazione sullo spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale derivabili in ogni punto infinite volte. Con $D^{(k)}$, $k \in \mathbf{N}$ si indichi quindi l'operatore di che associa alla funzione la funzione derivata k^a, se $k \neq 0, 1$, D stesso se $k = 1$, e l'identità I su $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ se $k = 0$
a- Dati $r, \omega \in \mathbf{R}$, non entrambi nulli, sia $T = T_{r,\omega}$ il sottospazio di $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ generato dalle funzioni $e^{rt}\cos\omega t$, $e^{rt}\sin\omega t$. Si mostri che D è bigettivo da T in sé.
b- Si determini la matrice associata a tale restrizione a T di D, considerando come base di T la coppia le funzioni $e^{rt}\cos\omega t$, $e^{rt}\sin\omega t$ (cfr. domanda 10 terzo foglio di esercizi).
c- Si considerino gli operatori lineari $D^2 + D + I$ e $D^2 + I$: si mostri che anch'essi operano su T, e si trovino le rispettive matrici associate alle loro restrizioni a T rispetto alla stessa base.
d- Si trovino le soluzioni del tipo $f(t) = \alpha\cos t + \beta \sin t$ delle equazioni $f'' + f' + f = \cos$, $f'' + f = \cos$.

19b

Una proiezione ($P^2 = P$ cioè $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$) è ortogonale quando $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^\perp$ ($\underset{\text{sempre vero}}{=} \operatorname{Ker} {}^tP$)
(cioè le direzioni di proiezione sono ortogonali al sottospazio immagine)

- se P è ortogonale cioè $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} {}^tP \implies P = {}^tP$
si noti che: $O_{n\times n} = {}^tO_{n\times n} = {}^t(P^2 - P) = {}^t(P^2) - {}^tP = ({}^tP)^2 - {}^tP$
e $\operatorname{Ker} P \underset{\text{sempre vero}}{=} (\operatorname{Im} {}^tP)^\perp \Rightarrow \operatorname{Ker} {}^tP = (\operatorname{Im} {}^tP)^\perp$ quindi anche ${}^tP$ è una proiezione ortogonale
- Si ha $\boxed{\operatorname{Im} P} = (\operatorname{Im} P)^{\perp\perp} = (\operatorname{Ker} {}^tP)^\perp = (\operatorname{Im} {}^tP)^{\perp\perp} = \boxed{\operatorname{Im} {}^tP}$
cioè $\forall u \ \exists v \ {}^tPu = Pv$ ./.

- $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}{}^tP \oplus \operatorname{Im}{}^tP$

$\forall x \quad \exists!\, u, k : \quad x = {}^tP u + k \qquad k \in \operatorname{Ker}{}^tP = \operatorname{Ker} P$

- Ma $\forall u \; \exists v \quad {}^tP u = P v$

$$\Longrightarrow \qquad P\,{}^tP u = P \underbrace{P v}_{= {}^tP u} = P v = {}^tP u = {}^tP\,{}^tP u$$

$$\forall u \qquad P\,{}^tP u - {}^tP\,{}^tP u = 0$$

$$(P - {}^tP)\,{}^tP u = 0$$

cioè $\quad P = {}^tP \quad$ su $\quad \operatorname{Im}{}^tP$

- $\forall x \qquad P x = P\,{}^tP u = {}^tP\,{}^tP u = {}^tP x$

P è una proiezione ortogonale $\Longleftrightarrow \begin{cases} P^2 - P = 0_{n \times n} \\ P = {}^tP \end{cases}$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2020/21
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quarto foglio di esercizi Bis

Domande di introduzione

10/11 **Domanda 1** Se A, B, U sono sottospazi vettoriali per cui $U \oplus A = U \oplus B$ allora $dim\, A = dim\, B$.

Domanda 2 Si consideri in $\mathbf{R}^4$ il sottospazio P definito da $\begin{cases} x + y & = 0 \\ x - y + z + u & = 0 \end{cases}$.

a- Si determini $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ lineare per cui $ImA = KerA = P$.
b- Si scriva la matrice della A determinata.

Domanda 3 Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore, con 0 sulla diagonale. Mostrare che $T^n = \mathbf{O}_{\mathcal{M}(n)}$.

Domanda 4 (cfr. domanda 10 del quarto foglio) Si considerino r e π i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ definiti rispettivamente da $\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ x \ + \ 2z & = 0 \end{cases}$, $2x + y + 3z = 0$.

a- Determinare quali sono le funzioni $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineari per cui $KerL = r$, $ImL = \pi$?
b- Calcolare per una di esse la matrice che la identifica nella base canonica e quindi L^2 ed L^3.
c- Vi sono tali L per cui, per ogni m, L^m non è la matrice nulla?
d- In generale esprimere L^m, $m \geq 2$, in termini di L^2.

Domanda 5 (cfr. esercizio 2 del quarto foglio) Data due matrici reali $M \in \mathcal{M}(n, m, \mathbf{R})$, $n \times m$, $L \in \mathcal{M}(m, n, \mathbf{R})$, $m \times n$, per cui

$$\text{per ogni } x \in \mathbf{R}^m,\ y \in \mathbf{R}^n \text{ si abbia } \langle Mx \cdot y\rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle x \cdot \ Ly\rangle_{\mathbf{R}^m}.$$

Si mostri che $L = {}^tM$.

Domanda 6 (cfr. domanda 19b ed esercizio 2 del quarto foglio) (pseudo inversa di Moore-Penrose nel caso di rango massimo)

Si consideri una matrice $A \in \mathcal{M}(n, k, \mathbf{R})$, $n \times k$, con $k < n$.
a- La matrice $A\,{}^tA$, non è mai invertibile.
b- La matrice ${}^tAA$ è invertibile se e solo se A è di rango massimo. IX %
19/12 c- Se A è di rango massimo la matrice $A\,({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$ dà la proiezione ortogonale su ImA.

Domanda 7 (cfr. domanda 5 del quinto foglio) Quali sono le matrici $M \in \mathcal{M}(n)$ per cui
7/12
a- per ogni $N \in \mathcal{M}(n)$ invertibile si abbia $M = NMN^{-1}$?
b- per ogni altra $N \in \mathcal{M}(n)$ si abbia $NM = MN$?

(sugg. trovare delle matrici che sicuramente soddisfano la condizione in b-. Quindi per rispondere ad a- fare opportuni cambiamenti di base).

Recupero **Domanda 8** (cfr. domanda 18 quarto foglio di esercizi) Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore con 1 sulla diagonale. X
Provare che se per qualche $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$ si ha $T^k = Id_{\mathcal{M}(n)}$ allora $T = Id_{\mathcal{M}(n)}$.

II 15/12 **Domanda 9** Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbf{K}$.
Se vi sono $a \neq b$ in $\mathbf{K}$, per cui $(A - aI_{n\times n})(A - bI_{n\times n}) = \mathrm{O}_{n\times n}$, allora:

$$\mathbf{K}^n = Ker\,(A - aI_{n\times n}) \oplus Ker\,(A - bI_{n\times n}) \text{ e } Ker\,(A - aI_{n\times n}) = Im\,(A - bI_{n\times n})$$

IV bis d.6.c

Pseudo inversa di Moore-Penrose

$A^1, \dots, A^k$ base di $V \subseteq \mathbb{R}^n$ $n > k$

$A = (A^1 | \dots | A^k)$ $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$ (*)

si vuole provare che la proiezione ortogonale su V, P è eguale a $A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$

$x \in \mathbb{R}^n$ da (*) $x = \underbrace{Px}_{V} + \underbrace{(x - Px)}_{V^\perp}$

ma $V = \mathrm{span}(A^1, \dots, A^k) = \mathrm{Im}\, A$: $\exists y\ Px = Ay$ (**)

$V^\perp = (\mathrm{Im}\, A)^\perp = \mathrm{Ker}\,{}^tA$

$x = Ay + (x - Px)$

${}^tAx = {}^tAAy + \underbrace{{}^tA(x - Px)}_{= 0}$

quindi

$A({}^tAA)^{-1}\,{}^tAx = A({}^tAA)^{-1}\,{}^tAAy = Ay \overset{(**)}{=} Px$

NOTA $({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\,x$ da le coordinate di Px nella base scelta, $A^1 \dots A^k$, di V

Nome: Matricola:

ALGEBRA LINEARE

Primo compito a casa

19/12

Esercizio 1

Sia P il piano di $\mathbb{R}^4$ di equazioni $\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

- Determinare una applicazione lineare, cioè una matrice $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che Ker $A = P$ e Im $A = P$.
- Dimostrare che $A^2 = AA = 0_{4\times 4}$.

Esercizio 2.

Si considerino in $\mathbb{R}^3$ la retta r di equazioni $\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$, e il piano P di equazione $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$.

Determinare una matrice A a tre righe e tre colonne tale che Ker $A = r$ e Im $A = P$. Calcolare A^2 e A^3.

Esercizio 3.

Sia $\theta \in \mathbb{R}$ un numero che non sia multiplo intero di $\frac{\pi}{2}$ di modo che $\sin\theta$ e $\cos\theta$ siano entrambi diversi da 0. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Calcolare A^{-1}.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Ottavo foglio di esercizi

Esercizio 1 Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a- È diagonalizzabile su $\mathbf{R}$?

b- Descrivere una base in cui la matrice, associta all'endomorfismo di $\mathbf{R}^n$ definito da A, è triangolare.

19/12 **Esercizio 2** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$. V

a- Per quali $a \in \mathbf{R}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$?

b- Per quali $a \in \mathbf{R}$ è triangolabile su $\mathbf{R}$?

c- Per quali $a \in \mathbf{C}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{C}$?

Esercizio 3 (Prosecuzione dell'esercizio 5 del sesto foglio) Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lineare *non identicamente nulla*, e $v_0 \in \mathbf{R}^n$ *non nullo*. Si definisce l'endomorfismo lineare $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ come segue

$$T(x) \; = \; x \; + \; f(x)v_0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

d- Quale relazione deve sussistere tra f e v_0 affinchè l'endomorfismo T sia simmetrico?

e- Quale relazione necessariamente deve sussistere tra $Ker\, f$ e v_0 affinchè T sia ortogonale?

f- In tal caso dare un'interpretazione geometrica dell'azione di T sui punti di $\mathbf{R}^n$.

Esercizio 4 Si caratterizzino gli endomorfismi *simmetrci e ortogonali* in $\mathbf{R}^n$.