Esercitazione 15 recupero

21 dicembre

$\langle (x\,y\,z\,u)\cdot(1\,1\,1\,1)\rangle = 0 \longrightarrow$
$\langle (x\,y\,z\,u)\cdot(1\,{-1}\,1\,{-1})\rangle = 0$

vero sempre $W \subsetneq \mathbb{R}^n$ $W \neq (0)$

$\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ Premessa

Esercizio 4 Siano U e V sottospazi di $\mathbf{R}^4$ definiti rispettivamente da $\begin{cases} x & +y & +z & +u & = & 0 \\ x & -y & +z & -u & = & 0 \end{cases}$, e $\begin{cases} x & +y & & & = & 0 \\ & & z & +u & = & 0 \end{cases}$, e si indichino i loro ortogonali con $U^\perp$, $V^\perp$.

a- Si mostri che esiste un'unica funzione lineare $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ per cui $KerA = U^\perp \cap V^\perp$, e $A : U + V \to U + V$ sia l'identità su $U + V$.

b- Si mostri che A è simmetrica.

c- Si trovi una base di $U+V$ costituita da elementi di $U \cap V$, $U \cap V^\perp$, $U^\perp \cap V$.

d- Si scriva la matrice (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^4$) che identifica A.

21/12 I

$(\text{Ker}\,A)^\perp = \text{Im}\,{}^tA$ $\qquad \underline{Ax = 0} \iff \forall y \ \langle Ax \cdot y\rangle_m = \langle x \cdot {}^tAy\rangle_n \ \forall y$

$x \in \text{Ker}A \iff x \perp \text{Im}\,{}^tA$

Premessa

P è una proiezione ortogonale cioè $\begin{cases} 1) \ \mathbb{R}^n = \text{Im}P \oplus \text{Ker}P & \text{Proiezione} \\ 2) \ \text{e } \text{Ker}P = (\text{Im}P)^\perp & \text{ortogonale} \end{cases}$

$\iff$ 1bis $P^2 - P = O_n$

2bis $P = {}^tP$

$\mathbb{R}^4$ $\text{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = U$ $\qquad \text{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = V$

$\to U^\perp = \text{span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad V^\perp = \text{span}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

a) $\exists!\ A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $\quad \text{Ker}\,A \overset{1}{=} \underline{U^\perp \cap V^\perp \overset{\text{TEO}}{=} (U+V)^\perp}$, $A(U+V) \subseteq U+V$

anzi $A|_{U+V} \overset{2}{=} id|_{U+V}$

$\mathbb{R}^4 = (U+V) \oplus (U+V)^\perp = (U+V) \oplus U^\perp \cap V^\perp$

$s_1 \cdots s_k$ base di $U+V$

$k_1 \cdots k_{4-k}$ base di $\underline{U^\perp \cap V^\perp}$

$s_1 \cdots s_k \ k_1 \cdots k_{4-k}$ è una base di $\mathbb{R}^4$

quindi A è ben definita ed è univocamente determinata

$A(k_j) \overset{1}{=} \underline{0} \iff A|_{U^\perp \cap V^\perp} = 0_{lin}$

$A(s_i) \overset{2}{=} s_i \iff A|_{U+V} = id_{U+V}$

MANCA DA VERIFICARE $0 < \dim(U+V) < 4$ ovvero $0 < \dim U^\perp \cap V^\perp < 4$

$U^\perp \cap V^\perp \subseteq U^\perp$
$\subseteq V^\perp$

Dato che $\dim U^\perp = \dim V^\perp = 2 < 4$
$\dim U^\perp \cap V^\perp \leq 2 < 4$

Si tratta di vedere che $U^\perp$ e $V^\perp$ <u>non sono in somma diretta</u>
cioè $\dim V^\perp \cap U^\perp > 0$

se ciò fosse

$$\boxed{s\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = -\sigma\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \tau\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}$$

generico elemento di $U^\perp$ — generico elemento di $V^\perp$

$\boxed{s+t=1}$
$s-t=1$
$\boxed{s+t=0}$
$s-t=0$
NON HA SOL

① ad occhio
$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \in U^\perp \cap V^\perp$$

domanda $\dim U^\perp \cap V^\perp < 2$?
se fosse $=2$. $U^\perp \cap V^\perp = U^\perp = V^\perp$

$$\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{matrix} = \begin{matrix}1\\1\\0\\0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{matrix} \begin{matrix}\sigma=1\\ \to s0\\ \to t=0\\ \end{matrix}$$

$0 < \dim U^\perp \cap V^\perp < 2$
$\Downarrow$
$\dim U^\perp \cap V^\perp = 1$
$\Downarrow$
$\dim U+V = 3$

$$\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{matrix}$$

è un insieme di generatori di $U^\perp + V^\perp$

$\dim U^\perp + V^\perp = 3$

② OPPURE si VERIFICA CHE IL SISTEMA HA SOLUZIONI NON NULLE

$$s\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\\\sigma\\\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

cioè
$$\begin{cases} s+t+\sigma = 0\\ s-t+\sigma = 0\\ s+t+\tau = 0\\ s-t+\tau = 0\end{cases}$$

$$\begin{array}{l|cccc} & 1 & 1 & 1 & 0\\ \text{I}-\text{II} & 0 & 2 & 0 & 0\\ \text{I}-\text{III} & 0 & 0 & 1 & -1\\ \text{I}-\text{IV} & 0 & 2 & 1 & -1\end{array}$$

$$\begin{array}{l|cccc} & 1 & 1 & 1 & 0\\ & 0 & 2 & 0 & 0\\ & 0 & 0 & 1 & -1\\ \text{II}+\text{III}-\text{IV} & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

rk 3
c'è una sol non banale

quindi $\mathbb{R}^4 \neq U^\perp \cap V^\perp \neq (0)$ anche $U+V \neq (0), \mathbb{R}^4$

a posteriori si ritrova quanto visto in ①

una sol. di * non banale (s, t, σ, τ)
un elemento non nullo $U^\perp \cap V^\perp$

$$\begin{array}{ccccc} s & t & \sigma & \tau & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

$s = -\sigma = -\tau$
$t = 0$
$\sigma = \tau$
$\tau($

$$-\sigma\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = -\sigma\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \sigma\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

base $U^\perp \cap V^\perp$

b) A è simmetrica

$$A\big|_{U+V} = id_{U+V} \quad A\big|_{\underset{U^{\perp}\cap V^{\perp}}{\overset{\|}{(U+V)^{\perp}}}} = O_{\mathbb{R}^n}$$

$$A^2 = A$$ è una proiezione

$A : U+V \to U+V$ $\quad \vec{u} \in U \ \vec{v} \in V$

$A(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}+\vec{v}$

$A^2(\vec{u}+\vec{v}) = A(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}+\vec{v}$

$A : (U+V)^{\perp} \to (0) \subseteq (U+V)^{\perp}$

$A^2 : (U+V)^{\perp} \to (0)$

ma $\ker A = (U+V)^{\perp}$ è una proi ort.

$\operatorname{Im} A = (U+V) \quad \ker A = (U+V)^{\perp}$

$\mathbb{R}^4 = \underset{\text{Proiezion}}{\operatorname{Im} A \oplus \ker A} = (U+V) \oplus (U+V)^{\perp}$

quindi non solo $A^2 - A = O_n$ ma $A = {}^tA$

Esercizio 4 Siano U e V sottospazi di $\mathbf{R}^4$ definiti rispettivamente da $\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ x - y + z - u = 0 \end{cases}$, e $\begin{cases} x + y = 0 \\ z + u = 0 \end{cases}$, e si indichino i loro ortogonali con $U^\perp$, $V^\perp$.

~~a~~- Si mostri che esiste un'unica funzione lineare $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ per cui $KerA = U^\perp \cap V^\perp$, e $A : U + V \to U + V$ sia l'identità su $U + V$.

~~b~~- Si mostri che A è simmetrica.

c- Si trovi una base di $U+V$ costituita da elementi di $U \cap V$, $U \cap V^\perp$, $U^\perp \cap V$.

d- Si scriva la matrice (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^4$) che identifica A.

c) $U+V \supseteq U \cap V$

$\underline{\dim U+V = 3} \Rightarrow \dim U\cap V = 1$

$\underline{U^\perp + V^\perp} = \text{span} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} = \text{span} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 1 \end{matrix} \right)$

$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$

$\dim = 3$

$U \cap V^\perp \qquad U^\perp \cap V$

$U+V = (U^\perp \cap V^\perp)^\perp$

perchè $(U+V) \cap U \cap V^\perp \neq (0)$, $(U+V) \cap U^\perp \cap V \neq (0)$?

$\boxed{U \cap V}$ = soluzioni $\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$ $\quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} x & y & z & u \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = u \\ y = -u \\ z = -u \end{matrix}$$

$\mathbb{R} \cdot (1\ -1\ -1\ 1)$

$U \cap V^\perp$

visto che abbiamo le equazioni di U e la forma parametrica di $V^\perp$

$\begin{matrix} x & y & z & u & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{matrix}$

$V^\perp = \begin{pmatrix} s \\ s \\ t \\ t \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ u \end{matrix}$ $\quad U \cap V^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \subseteq U+V$

$2s + 2t = 0$
$0 + 0 = 0$

$\left(\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}\right)\frac{1}{2}$

$U^\perp \cap V$ $\qquad$ V soluz $\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$ $\quad a + b = 0$

$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ $\quad \left(\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} - \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}\right)\frac{1}{2}$

$U^\perp = \begin{pmatrix} s+t \\ s-t \\ s+t \\ s-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad U^\perp \cap V = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} v^1 & v^2 & v^3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}$$

v^3 ← base di $\underline{U^\perp \cap V}$

sono ortogonali

v^1: base di $\underline{U \cap V}$ $\qquad$ v^2: base di $\underline{U \cap V^\perp}$

poichè $U \cap V \perp U \cap V^\perp + U^\perp \cap V^\perp$

$U \cap V^\perp \perp U^\perp \cap V$

$\dim \text{span} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix} = 3$ $\quad$ sono $v^1 v^2 v^3 \subseteq \underset{\dim 3}{U+V}$

Lemma: $v_1 \ldots v_k \in \mathbb{R}^n$ non nulli sono ortogonali sono anche indipendenti

$\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_k v_k = \underline{0}$

$\lambda_i \langle v_i \cdot v_i \rangle = 0$

$\lambda_i = 0 \Leftarrow$ " $|v_i|^2 \neq 0$

d) Vogliamo la matrice che rappresenta A nella base canonica

Ora noi conosciamo una base ortogonale di $U+V$

$|(x\,y\,z\,w)|$

$= \sqrt{(x\,y\,z\,w)\cdot(x\,y\,z\,w)}$

$= \sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ U\cap V & U\cap V^{\perp} & U^{\perp}\cap V \end{array}$$

troviamo una base di $U^{\perp}\cap V^{\perp} = (U+V)^{\perp}$

e $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in U^{\perp}\cap V^{\perp}$

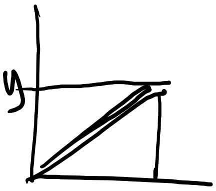
$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

$A|_{U^{\perp}\cap V^{\perp}} = O_{End}$ $\quad A|_{U+V} = id$

quindi in tale base di $\mathbb{R}^4$ la matrice associata ad A

$$\mathbb{R}^4 = \underbrace{(U+V)}_{\substack{\text{base}\\ \frac{v^1}{2}\,\frac{v^2}{2}\,\frac{v^3}{2}}} \oplus \underbrace{(U^{\perp}\cap V^{\perp})}_{\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}}$$

$\frac{v_1}{2}\ \frac{v_2}{2}\ \frac{v_3}{2}$ e $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ è una base ortonormale $\mathcal{B}$



$\sqrt{x^2+y^2}$

$$S^{-1} = {}^{t}S \qquad x_1\frac{v_1}{2} + x_2\frac{v_2}{2} + x_3\frac{v_3}{2} + x_4\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$\overset{S}{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

$x_1\frac{v_1}{2} + x_2\frac{v_2}{2} + x_3\frac{v_3}{2}$ $\quad x_1\ x_2\ x_3\ 0$

Esercizio proposto da Francesca da Sienze

26/07/2016 Esame scritto

ES 3 $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineare : $f^2 = f$

$f(f-id)=0$

$x(x-1)$

1) dim. che f è diagonalizzabile

2) costruire tale f in modo che $\dim \operatorname{Ker} f = 1$

---

2) $f(x,y,z) = (0,y,z)$

$f(0,y,z) = (0,y,z)$

1) $f^2 - f = 0_{end}$ cioè f verifica il polinomio $x^2 - x$

cioè $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$

$id - f$ proiezione su $\operatorname{Ker} f$ parallela a $\operatorname{Im} f$

$\dim V = n$ $f: V \to V$ lineare

$(f - a\,id)(f - b\,id) = 0_{end}$ $a \neq b$

allora $V = \operatorname{Ker}(f - a\,id) \oplus \operatorname{Ker}(f - b\,id)$

$\operatorname{Im}(f - b\,id) \overset{*}{\subseteq} \operatorname{Ker}(f - a\,id)$

$n = \boxed{\dim \operatorname{Im}(f - b\,id)} + \dim \operatorname{Ker}(f - b\,id) \overset{*}{\leq}$

$\leq \dim \operatorname{Ker}(f - a\,id) + \dim \operatorname{Ker}(f - b\,id) \leq$

$= \dim(\operatorname{Ker}(f - a\,id) + \operatorname{Ker}(f - b\,id)) \leq n$

$\dim \operatorname{Im} f - b\,id = \dim \operatorname{Ker} f - a\,id$

$\Downarrow$

$\operatorname{Im} f - b\,id = \operatorname{Ker} f - a\,id$

$\underline{0} = \operatorname{Ker}(f - a\,id) \cap \operatorname{Ker}(f - b\,id)$ $a \neq b$

$f(x) = ax = bx$ $x \neq 0$

$V = \underline{\operatorname{Ker}(f - a\,id) \oplus \operatorname{Ker}(f - b\,id)} = \operatorname{Im} f - b\,id \oplus \operatorname{Ker} f - b\,id$

SI GENERALIZZA A POLINOMI CON SOLO RADICI SEMPLICI

F IV

c-Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.
d- Le mosse di Gauss (sostituzione con somma di multplo di un'altra riga e permutazione di righe) non trasformano una matrice in una simile.

Domanda 18 Sia $A \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{C})$ tale che $A^k = O_{n\times n}$ per qualche $k \in \mathbf{N}$: mostrare che per ogni $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ la matrice $\lambda Id_{n\times n} - A$ è invertibile.

21/12 II

Domanda 19 a- Dato uno spazio vettoriale U, mostrare che tutte e sole le proiezioni P su un sottospazio di U sono le applicazioni lineari da U in sé, per cui $P^2 - P = O$.
19/12
b- Si rammenti che data $A \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{R})$ si ha $\langle Ax \cdot y\rangle = \langle x \cdot {}^tAy\rangle$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$:
Si mostri che tutte le proiezioni ortogonali su un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ sono quelle per cui
$P^2 - P = O_{n\times n}$ e $P = {}^tP$.

Domanda 20 Per $t \in \mathbf{R}$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & t \end{pmatrix}$, e si consideri $M_A : \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R}) \to \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ data da $M_A(B) = AB = (AB^1|AB^2)$ ove B^1, B^2 son la prima e seconda colonna di B.
a- Si provi che M_A è lineare. b- Al variare di t si determinino l'immagine e il nucleo di M_A.

Domanda 21 Sia $D : \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ l'operatore lineare di derivazione sullo spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale derivabili in ogni punto infinite volte. Con $D^{(k)}$, $k \in \mathbf{N}$ si indichi quindi l'operatore di che associa alla funzione la funzione derivata k^a, se $k \neq 0, 1$, D stesso se $k = 1$, e l'identità I su $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ se $k = 0$
a- Dati $r, \omega \in \mathbf{R}$, non entrambi nulli, sia $T = T_{r,\omega}$ il sottospazio di $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ generato dalle funzioni $e^{rt}\cos\omega t$, $e^{rt}\sin\omega t$. Si mostri che D è bigettivo da T in sé.
b- Si determini la matrice associata a tale restrizione a T di D, considerando come base di T la coppia le funzioni $e^{rt}\cos\omega t$, $e^{rt}\sin\omega t$ (cfr. domanda 10 terzo foglio di esercizi).
c- Si considerino gli operatori lineari $D^2 + D + I$ e $D^2 + I$: si mostri che anch'essi operano su T, e si trovino le rispettive matrici associate alle loro restrizioni a T rispetto alla stessa base.
d- Si trovino le soluzioni del tipo $f(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t$ delle equazioni $f'' + f' + f = \cos$, $f'' + f = \cos$.

21/12 II

IV foglio **Domanda 18** Sia $A \in \mathcal{M}(n,n,\mathbf{C})$ tale che $A^k = O_{n\times n}$ per qualche $k \in \mathbf{N}$: mostrare che per ogni $\lambda \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ la matrice $\lambda Id_{n\times n} - A$ è invertibile.

IV foglio bis **Domanda 8** (cfr. domanda 18 quarto foglio di esercizi) Sia T una matrice $n\times n$ triangolare superiore con 1 sulla diagonale.
Provare che se per qualche $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$ si ha $T^k = Id_{\mathcal{M}(n)}$ allora $T = Id_{\mathcal{M}(n)}$.

d.18 $\quad \lambda I - A \quad A^k \quad \lambda - 3 \quad 3^k$

$$\lambda^k I = (\lambda I)^k - A^k =$$
$$= (\lambda I - A)(\dots)$$
$$I = (\lambda I - A)(\dots)$$

$$\lambda^k - 3^k =$$
$$= (\lambda - 3)(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2}\cdot 3 + \dots + \lambda 3^{k-2} + 3^{k-1})$$
$$\lambda\cdot(\dots) \quad \lambda^k + \cancel{\lambda^{k-1}\cdot 3} + \dots + \cancel{\lambda^2 3^{k-2}} + \cancel{\lambda 3^{k-1}}$$
$$-3(\dots) = \cancel{-3\lambda^{k-1}} - \cancel{3\lambda^{k-2}3} \dots \cancel{-3\lambda 3^{k-2}} - 3^k$$

$$\lambda^k I - A^k = (\lambda I - A)(\lambda^{k-1} I + \lambda^{k-2} I A + \dots + \lambda I A^{k-2} + A^{k-1})$$

$BA = AB$ $\quad B^k - A^k = (B - A)(B^{k-1} + B^{k-2}A + \dots + BA^{k-2} + A^{k-1})$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2020/21
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quarto foglio di esercizi Bis

Domande di introduzione

10/11 **Domanda 1** Se A, B, U sono sottospazi vettoriali per cui $U \oplus A = U \oplus B$ allora $dim\, A = dim\, B$.

Domanda 2 Si consideri in $\mathbf{R}^4$ il sottospazio P definito da $\begin{cases} x+y & = & 0 \\ x-y+z+u & = & 0 \end{cases}$.
a- Si determini $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ lineare per cui $ImA = KerA = P$.
b- Si scriva la matrice della A determinata.

Domanda 3 Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore, con 0 sulla diagonale. Mostrare che $T^n = \mathbf{O}_{\mathcal{M}(n)}$.

Domanda 4 (cfr. domanda 10 del quarto foglio) Si considerino r e π i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ definiti rispettivamente da $\begin{cases} x+y+z & = & 0 \\ x\ +\ 2z & = & 0 \end{cases}$, $2x+y+3z = 0$.
a- Determinare quali sono le funzioni $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineari per cui $KerL = r$, $ImL = \pi$?
b- Calcolare per una di esse la matrice che la identifica nella base canonica e quindi L^2 ed L^3.
c- Vi sono tali L per cui, per ogni m, L^m non è la matrice nulla?
d- In generale esprimere L^m, $m \geq 2$, in termini di L^2.

Domanda 5 (cfr. esercizio 2 del quarto foglio) Data due matrici reali $M \in \mathcal{M}(n, m, \mathbf{R})$, $n \times m$, $L \in \mathcal{M}(m, n, \mathbf{R})$, $m \times n$, per cui

per ogni $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^n$ si abbia $\langle Mx \cdot y \rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle x \cdot Ly \rangle_{\mathbf{R}^m}$.

Si mostri che $L = {}^tM$.

Domanda 6 (cfr. domanda 19b ed esercizio 2 del quarto foglio) (pseudo inversa di Moore-Penrose nel caso di rango massimo)

Si consideri una matrice $A \in \mathcal{M}(n, k, \mathbf{R})$, $n \times k$, con $k < n$.
a- La matrice $A\,{}^tA$, non è mai invertibile.
b- La matrice ${}^tAA$ è invertibile se e solo se A è di rango massimo.
19/12 c- Se A è di rango massimo la matrice $A\,({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$ dà la proiezione ortogonale su ImA.

Domanda 7 (cfr. domanda 5 del quinto foglio) Quali sono le matrici $M \in \mathcal{M}(n)$ per cui
7/12
a- per ogni $N \in \mathcal{M}(n)$ invertibile si abbia $M = NMN^{-1}$?
b- per ogni altra $N \in \mathcal{M}(n)$ si abbia $NM = MN$?

(sugg. trovare delle matrici che sicuramente soddisfano la condizione in b-. Quindi per rispondere ad a- fare opportuni cambiamenti di base).

21/12 **Domanda 8** (cfr. domanda 18 quarto foglio di esercizi) Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore con 1 sulla diagonale.
Provare che se per qualche $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$ si ha $T^k = Id_{\mathcal{M}(n)}$ allora $T = Id_{\mathcal{M}(n)}$.

15/12 **Domanda 9** Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbf{K}$.
Se vi sono $a \neq b$ in $\mathbf{K}$, per cui $(A - aI_{n\times n})(A - bI_{n\times n}) = \mathrm{O}_{n\times n}$, allora:

$$\mathbf{K}^n = Ker\,(A - aI_{n\times n}) \oplus Ker\,(A - bI_{n\times n}) \text{ e } Ker\,(A - aI_{n\times n}) = Im\,(A - bI_{n\times n})$$

$A = [\ ]$

6ab
a. $A \cdot ({}^tA)_{n\times n}$
rango $A \leq k$
rango ${}^tA \leq k$
rang $A\cdot({}^tA)_{n\times n} \leq k < n$

b. ${}^tA \cdot A_{k\times k}$ invertibile allora A ha rango massimo k. Se A non lo avesse le sue colonne sarebbero dipendenti è quindi anche ${}^tAA^1 \ldots {}^tAA^k$ sarebbero dipendenti

Viceversa
Se A ha rango massimo $Im A = (Ker\,{}^tA)^\perp$ quindi $Im A \cap Ker\,{}^tA = (0)$
${}^tA|_{Im A}$ è bigettiva