Esercizio 1. Si consideri $\Psi(u,v)=\left((2-v\sin\frac{u}{2})\sin u,\ (2-v\sin\frac{u}{2})\cos u,\ v\cos\frac{u}{2}\right)$

$0\leq u\leq 2\pi,\ -1\leq v\leq 1$

a. Ψ è una 2-superficie parametrica (A2 pag. 366 Def. 4.9.1)? Perchè si?

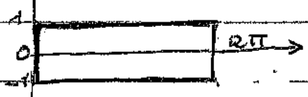
b. L'immagine di Ψ su $0\leq u\leq 2\pi$, $-1 \leq v \leq 1$ è una 2-varietà senza bordo (A2 pag. 412 Def. 4.11.1, Teo 4.11.3)? Perchè si?

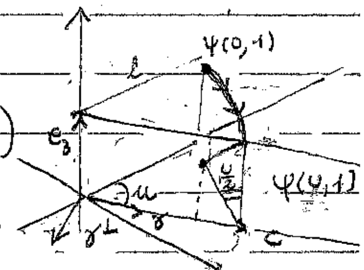
c. L'immagine di ψ è una varietà con bordo (note Tortorelli 25 Novembre Def. 2)? Perchè si?

d. Il bordo è di un solo pezzo? cioè è connesso per cammini?

e. Calcolare in $\psi(\frac{\pi}{3},1)$ il versore normale (al bordo), tangente (alla varietà) esterno.

a) $\psi(u,v): T=\overline{A}\to\mathbb{R}^3 \quad A=(0;2\pi)\times(-1;1)$





$\psi(u,v)=(\vec{c}(u),0)+v\left((\hat{c}(u),0)(-\sin\frac{u}{2})+(0,0,1)\cos\frac{u}{2}\right)$

$\vec{c}(u)=(2\sin u, 2\cos u)$

$\hat{c}(u)=(\sin u,\cos u)=\frac{\vec{c}}{2} \qquad \vec{c}\,'(u)=(2\cos u,-2\sin u)\perp\vec{c}(u),\ \det(c\,c')<0$

$\widehat{c'(u)}=\widehat{c}\,'(u)=\frac{c'}{2}$: $((\hat{c},0),(\hat{c}',0),e_3)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ per ogni u, indicata $(\underline{\gamma},\underline{\gamma}^{\perp},\underline{e}_3)$. $\det(\underline{\gamma}\,|\,\underline{\gamma}^{\perp}\,|\,\underline{e}_3)<0$ i.e. $\gamma\cdot(\gamma^{\perp}\times e_3)<0$.

$$\psi(u,v)=(2-v\sin\tfrac{u}{2})\gamma+v\cos\tfrac{u}{2}\,e_3\ ,\qquad \underline{\gamma'=\gamma^{\perp}}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v)=-\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\,\gamma+(2-v\sin\tfrac{u}{2})\gamma'-\frac{v}{2}\sin\frac{u}{2}\,e_3$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v)=-\sin\frac{u}{2}\,\gamma+\cos\frac{u}{2}\,e_3$$

essendo $\gamma'\times e_3=-\gamma$; $\gamma\times e_3=\gamma'$ $\quad \gamma\times\gamma'=-e_3$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\times\frac{\partial\psi}{\partial v}=-\frac{v}{2}(\cos\tfrac{u}{2})^2\gamma\times e_3-\sin\tfrac{u}{2}(2-v\sin\tfrac{u}{2})\gamma'\times\gamma+\cos\tfrac{u}{2}(2-v\sin\tfrac{u}{2})\gamma'\times e_3+\frac{v}{2}(\sin\tfrac{u}{2})^2e_3\times\gamma$$

$$=-\frac{v}{2}(\cos\tfrac{u}{2})^2\gamma'-\sin\tfrac{u}{2}(2-v\sin\tfrac{u}{2})e_3-\cos\tfrac{u}{2}(2-v\sin\tfrac{u}{2})\gamma-\frac{v}{2}(\sin\tfrac{u}{2})\gamma'$$

$$=-\cos\tfrac{u}{2}(2-v\sin\tfrac{u}{2})\underline{\gamma}-\frac{v}{2}\underline{\gamma}'-\sin\tfrac{u}{2}(2-v\sin\tfrac{u}{2})\underline{e}_3\neq(0,0,0)\quad\forall u,v$$

Quindi ψ ha differenziale di rango massimo.

b) L'immagine di ψ su $(0;2\pi)\times(-1,1)$ è una varietà senza bordo per definizione. Per coprire tutta l'immagine di ψ su $[0;2\pi]\times(-1,1)$ manca l'immagine del segmento $\{0\}\times(-1;1)$, ovvero quella del segmento $\{2\pi\}\times(-1;1)$ che sono eguali:

$\psi(0,v)=(0,2,v)$, $\psi(2\pi,v)=(0,2,-v)=\psi(0,-v)$: $\underbrace{\{(0,2)\}}_{\text{COPPIA}}\times\underbrace{(-1;1)}_{\text{INTERVALLO}}$

Per definizione $\Psi|_{(0;2\pi)\times(-1;1)}$ è una carta locale, quindi basta trovare un'altra carta locale che "ricopra" (omeomorfismo C^1 con differenziale di rango massimo) il segmento $\underbrace{\{(0,2)\}}_{\text{COPPIA}}\times\underbrace{(-1;1)}_{\text{SEGMENTO}}$ anche se lascia "scoperta" qualche altra parte di $Im_{[0;2\pi]\times(-1;1)}\Psi$. Per esempio

$\varphi(s,t)=\Psi(s,t) \quad \pi<s<3\pi, -1<t<1$

che ricopre il segmento $\{0,2\}\times(-1;1)$ pur lasciando scoperto il segmento $(0,t,0)$, $t\in(-1,1)$.

Quindi $(\Psi,(0;2\pi)\times(-1;1))$ e $(\varphi,(\pi;3\pi)\times(-1;1))$ è l'atlante che definisce la 2-varietà senza bordo (cfr. note del 25 Novembre pagina 3 Definizione 5).

c

I punti dell'immagine di Ψ su $(0,2\pi)\times(-1;1)$ e dell'immagine di φ su $(\pi;3\pi)\times(-1;1)$ verificano le condizione di punto nell'interno relativo di una varietà (ibidem Def. 2.a)

I punti dell'immagine di Ψ su $(0;2\pi)\times\{1\}$, $(0;2\pi)\times\{-1\}$ e di φ su $(\pi;3\pi)\times\{1\}$, $(\pi;3\pi)\times\{-1\}$ verificano la condizione di punto di bordo di una varietà (Def 2.b)

d

Il bordo è quindi costituito dall'immagine di Ψ su $[0;2\pi]\times\{1\}$ e su $[0;2\pi]\times\{-1\}$

ovvero l'unione delle immagini dei cammini

$\Psi(u,1) \quad 0\leq u\leq 2\pi$, $\vartheta(u)=\Psi(u,-1) \quad 0\leq u\leq 2\pi$

Si osserva quindi che

$\Psi(u+2\pi,v)=\Psi(u,-v)$ in particolare

$\vartheta^+(0)=\vartheta^-(2\pi) \qquad (\vartheta^+(2\pi)=\vartheta^-(0))$

e

$\frac{\partial\Psi}{\partial v}(\frac{\pi}{3},1)$ è un vettore esterno tangente nel punto di bordo $\Psi(\frac{\pi}{3},1)$ poichè $\frac{\partial\Psi}{\partial u}(\frac{\pi}{3},1)$ è un vettore tangente al bordo in $\Psi(\frac{\pi}{3},1)$ e in generale $\frac{\partial\Psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial v}=0$, $\widehat{\frac{\partial\Psi}{\partial v}}(\frac{\pi}{3},1)$ è il versore cercato

Esercizio 2 (Cfr. Secondo Appello 2 Luglio 2015, seconda parte Esercizio 2)

a. $S^o = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^3 e^{-xy} = 8\}$ è una 2-varietà?
b. $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^3e^{-xy} = 8 \text{ e } z \geq 0\}$ è una 2-varietà con bordo?
Se ne determini nel caso il bordo.
c Si calcoli il vettore normale al bordo e tangente a S, esterno, nei punti di bordo
d Si mostri che $\Gamma =: S \cap \{(x,y,z) : x^2+y^2=2, z \in \mathbb{R}\}$ è sostegno di una curva regolare
e $S \setminus \Gamma$ è una varietà? è una varietà con bordo?
$S^o \setminus \Gamma$ " ? " ?

a) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^3e^{-xy}$ $S^o = \{f = 8\}$

$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - z^3 y e^{-xy} \\ 2y - z^3 x e^{-xy} \\ 3z^2 e^{-xy} \end{pmatrix}$ se $\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora $z=0$ da $3z^2e^{-xy}=0$

quindi da $2x - z^3ye^{-xy} = 0$ e da $2y - z^3xe^{-xy} = 0$ ne segue $x=0$ e $y=0$: $f(0,0,0) \neq 8$
Per il teorema del Dini S^o è una 2-varietà.

b) (Cfr. Note del 25 Novembre Definizione 2 a', b' pagina 2)
Denotata con $g(x,y,z)$ la funzione $(x,y,z) \rightsquigarrow -z$
$S = \{f = 0, g \leq 0\}$ $B = \{f = 0, g = 0\} = \{$
∇f è di rango massimo su B (supra: lo è su S)
$(\nabla f, \nabla g)$ " " B
$\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ quindi per definizione è una 2-varietà con bordo
data da un unico luogo di zeri. Sempre per definizione il bordo è $B = \{(x,y,0) ; x^2+y^2 = 8\}$

c) Un tale vettore è la proiezione ortogonale (Cfr. ibidem. Osserv. 4) di $\nabla g(P)$ sul piano tangente ad S in p punto del bordo B
$P = (x,y,0)$ $x^2+y^2=8$ $\nabla g(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T_P S$ = ortogonale $\nabla f(P)$, $\nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$
Quindi $\nabla g(P) \in T_P S$. Pertanto $(0,0,-1)$ è un vettore normale tangente esterno

d $S \cap \{(x,y,z) : x^2+y^2=2 \quad z\in\mathbb{R}\} =$

$= \{(x,y,z) : z\geq 0 \ \text{e} \ 2+z^3e^{-xy}=8 \ \text{e} \ x^2+y^2=2\}$

$= \{(x,y,z) : z^3 = 6e^{xy} \ \text{e} \ x^2+y^2=2\}$

$= \{(x,y,z) : z = \sqrt[3]{6}\, e^{\frac{xy}{3}} \ \text{e} \ x^2+y^2=2\}$

$= \operatorname{Im}_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left(\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, \sqrt[3]{6}\, e^{\frac{\sin 2\theta}{3}}\right)$.

e $S\setminus\Gamma$ non è una varietà poiché ha bordo ($B\subset S\setminus\Gamma$) è infatti una varietà con bordo, probabilmente fatta da due pezzi
$S^\circ\setminus\Gamma$ è una varietà probabilmente fatta da due pezzi'

Esercizio 3 $\quad \Sigma = \{(x,y,z,w) : x^2+y^2=1 \ \text{e} \ x^2+z^2=1 \ \text{e} \ 1< w^2+z^2\leq 4 \ \text{e} \ 0<y\}$

Provare che Σ è una 2-varietà con bordo.

$f(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ x^2+z^2-1\end{pmatrix} \quad f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2 \quad g(x,y,z,w) = w^2+z^2-4 \quad g:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$

$\Sigma^\circ =: \{(x,y,z,w) : f=\binom{0}{0} \ \text{e} -3<g<0 \ \text{e} \ y>0\}, \quad S =: \{(x,y,z,w) : f=\binom{0}{0} \ \text{e} \ 0<y\}$

ora per il teorema del Dini S è una 2-varietà poiché

$\nabla f(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2x & 2x \\ 2y & 0 \\ 0 & 2z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2 su S: se $-4xy=0 \Rightarrow$ $x=0 \Rightarrow y=\pm1$ e $z=\pm1$; $y=0$ è escluso.

$\Sigma^\circ = S\cap g^{-1}(-3;0)$ è ancora una 2-varietà essendo $g^{-1}(-3;0)$ aperto in $\mathbb{R}^4$.

Σ° dovrebbe essere nel caso l'interno relativo di Σ.

Resta da esaminare $T = \{(x,y,z,w) : f=\binom{0}{0} \ \text{e} \ g=0 \ \text{e} \ y>0\}$

$\nabla\begin{pmatrix} f \\ g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2x & 0 \\ 2y & 0 & 0 \\ 0 & 2z & 2z \\ 0 & 0 & 2w\end{pmatrix}$ ha rango massimo su T definito da $\begin{matrix} x^2+y^2=1 \\ x^2+z^2=1 \\ w^2+z^2=4\end{matrix} \Rightarrow z^2\leq 1$

$x=0\Rightarrow y^2=1, z^2=1 \Rightarrow w^2=3 \quad \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pm2 & 0 & 0 \\ 0 & \pm2 & \pm2 \\ 0 & 0 & \pm2\sqrt{3}\end{pmatrix} = 3$; $y=0$ non amm.; $z=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow y=0$ non amm.; $w=0\Rightarrow z^2>1$.

quindi rimane il caso $x\neq 0$ dovendo per il vincolo essere $y\neq 0, z\neq 0, w\neq 0$

ma il minore $\det\begin{pmatrix} x & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & z & z\end{pmatrix} =$ (sviluppo ultima colonna) $-zxy \neq 0$.

Quindi (cfr. note del 25 Novembre Definizione 2.0', 6') Σ è varietà con bordo T.

Altra soluzione dell'esercizio 3

$\{x^2+y^2=1,\ x^2+z^2=1,\ 1<w^2+z^2\leq 4,\ y>0\} = \Sigma$
$\quad$ 1) $\qquad$ 2) $\qquad$ 3) $\qquad$ 4)

$y=\sqrt{1-x^2}$ da 1) e 4)

$-1<x<1$ da 1) e 4)

$z=\sqrt{1-x^2}$ o $z=-\sqrt{1-x^2}$ da 3)

$1<w^2+1-x^2\leq 4$, $\quad x^2<w^2\leq 3+x^2$ da 4) e 3)

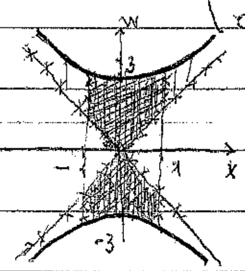
$\psi_1(x,w) = (x, \sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}, w)$ $\quad -1<x<1 \quad |x|<|w|\leq\sqrt{3+x^2} \quad 0<w \quad D_1$

$\psi_2(x,w) = (x, \sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2}, w)$ $\quad$ " $\quad$ " $\quad 0<w \quad D_2$

$\psi_3(x,w) = (x, \sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}, w)$ $\quad$ " $\quad$ " $\quad 0>w \quad D_3$

$\psi_4(x,w) = (x, \sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2}, w)$ $\quad$ " $\quad$ " $\quad 0>w \quad D_4$

$$\nabla\psi_i(x,w) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rango } 2$$



$D_1 = D_2$

$D_3 = D_4$

ψ_i^{-1} sono le proiezioni

le ψ_i sono diffeomorfismi su D_i