

CALCOLO NUMERICO  
 Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica  
 A.A. 2016/2017 – Appello 09/01/2018

---

NOME	COGNOME	MATRICOLA
------	---------	-----------

---

**Esercizio 1** Sia  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  definita da

$$A = \begin{bmatrix} L & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & L & I_2 \\ I_2 & & & L \end{bmatrix},$$

con

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

e  $I_2$  matrice identità di ordine 2. Per la risoluzione del sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  si considera il metodo iterativo  $M\mathbf{x}_{k+1} = N\mathbf{x}_k + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $k \geq 0$ , ottenuto ponendo

$$M = \begin{bmatrix} L & & \\ & \ddots & \\ & & L \end{bmatrix}, \quad N = M - A.$$

1. Si determini la matrice di iterazione del metodo.
2. Si mostri che il metodo iterativo è convergente.
3. Si determini un valore di  $\ell \in \mathbb{N}$  tale da aversi

$$\frac{\|\mathbf{x}_\ell - \mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\|_1} \leq 2^{-32},$$

con  $\mathbf{x}$  soluzione del sistema lineare.

4. Scrivere una funzione Matlab che dati in input  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2n}$  e  $tol \in \mathbb{R}$  implementa il metodo iterativo con vettore iniziale nullo per la risoluzione di  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  restituendo in output un vettore  $\mathbf{x}_k$  per cui  $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|_1 / \|\mathbf{x}_k\|_1 \leq tol$ .
5. Determinare il costo computazionale di una iterazione del metodo.
6. Per  $tol = 2^{-32}$ ,  $n = 512$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{ones}(1024, 1)$  riportare il numero di iterazioni eseguite dal metodo.
7. Utilizzando il comando `eig` di Matlab investigare sperimentalmente la convergenza del metodo di Jacobi applicato alla matrice  $A$  di ordine 1024 riportando il valore del raggio spettrale della matrice di iterazione.