ATTENZIONE! nel primo esercizio l'angolo con cui viene lanciata la palla è $\pi/4$ e non $\pi/2$!!!

I Compitino di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE 2008.

Esercizio 1: Un ragazzo intende colpire un bersaglio con una palla. Il bersaglio e la palla possono essere considerati puntiformi e gli attriti possono essere trascurati. Nel momento di distacco dalla mano del ragazzo, la palla ha una velocità di modulo v_o che forma un angolo di $\pi/2$ con la verticale, si trova a distanza l dal bersaglio lungo l'asse orizzontale e ad un'altezza h_o dal pavimento. Il bersaglio è posto ad un'altezza H dal pavimento.

1.1 - Determinare la velocità v_o al momento del tiro.

1.2 - Calcolare il coseno dell'angolo tra il campo gravitazionale $\boldsymbol{g}$ e la velocità della palla **nel momento in cui viene colpito il bersaglio**.

Esercizio 2: Un punto materiale si muove su una guida circolare di raggio R secondo la legge oraria $\alpha(t) = A\,t^3 + B\,t^2 + C\,t + D$ dove α è l'angolo (in radianti) spazzato dal punto materiale a partire dall'istante $t_o = 0$.

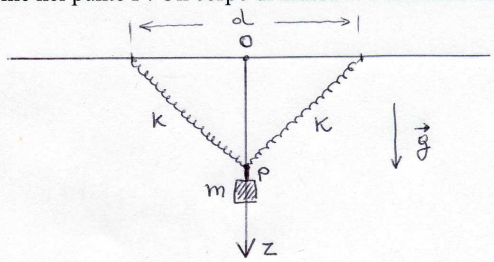
2.1 - Determinare il modulo dell'accelerazione centripeta al tempo t_1.

2.2 - Determinare il modulo della componente tangenziale dell'accelerazione al tempo t_2.

Esercizio 3: Un corpo sferico di massa m è lanciato in olio sintetico con velocità $\boldsymbol{v}_o = (v_{ox}, v_{oz})$. La scelta degli assi è tale che l'asse z è parallelo al campo gravitazionale $\boldsymbol{g} = (0, g)$ e x è un asse orizzontale. Il coefficiente di attrito viscoso fra il corpo e l'olio è γ.

3.1- Determinare il modulo della velocità del corpo dopo un tempo $t \gg m/g$.

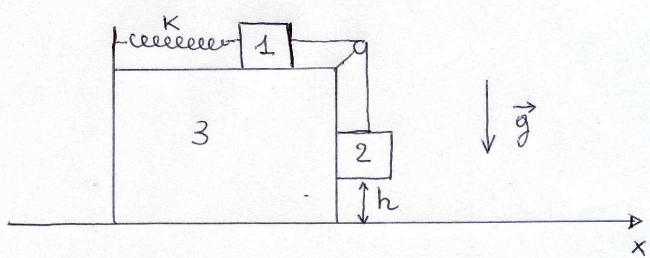
Esercizio 4: Due molle ideali identiche di costante elastica K e lunghezza a riposo trascurabile sono collegate al soffitto in due punti a distanza d come mostrato in figura. Gli altri estremi delle molle sono collegati insieme nel punto P. Un corpo di massa m è attaccato in P alle molle.



4.1- Si trovi la distanza z del punto P dal soffitto quando il sistema molle+ massa è in equilibrio.

4.2- Ad un dato istante t = 0, la massa m viene spostata verticalmente restando attaccata alle molle. Dopodichè, la massa viene lasciata libera da ferma. Si dica dopo quale tempo la massa passa nuovamente per il punto di equilibrio trovato al punto 4.1.

Esercizio 5:



Nel sistema in figura, i corpi 1, 2 e 3 hanno masse uguali ($m_1 = m_2 = m_3 = m$). I corpi 1 e 2 sono collegati insieme tramite una fune di massa trascurabile ed inestensibile che e' collegata ad una carrucola di massa trascurabile. Il corpo 1 è collegato al corpo 3 tramite una molla di costante elastica K. Tutti gli attriti sono trascurabili. Tutti i corpi sono inizialmente fermi, la molla è nella posizione di riposo e il corpo 2 si trova a distanza h da un pavimento orizzontale. Ad un dato istante t = 0, il corpo 2 viene lasciato libero di cadere mentre m_3 viene tenuto fermo ad ogni istante.

2.1- Si osserva che, se la distanza h del corpo 2 dal pavimento è superiore ad un dato valore h_o, esso non arriva mai a toccare il pavimento. Si trovi il valore di h_o.

2.2- Si trovi l'accelerazione dei corpi 1 e 2 all'istante immediatamente successivo al momento in cui il corpo 2 viene lasciato libero di cadere (t =0+).

2.3- Si trovi la componente x della forza (con il segno corretto) che un operatore esterno deve applicare sul corpo 3 per tenerlo fermo all'istante t =0+.

2.4- Supponendo, ora, che il blocco 3 sia, invece, libero di scivolare senza attrito sul piano orizzontale e che la distanza del corpo 2 da terra sia h =(m g)/(10 K), si trovi la velocità raggiunta **dal corpo 3** quando il corpo 2 tocca terra.

Soluzione Es.1- In generale, le equazioni orarie del moto lungo l'asse orizzontale x e quello verticale y si possono scrivere come:

$$y(t) = h_o + v_o(\cos\alpha)t - gt^2/2 = h_o + v_o t/\sqrt{2} - gt^2/2 \qquad (1a)$$

$$v_y(t) = v_o \cos\alpha - gt = v_o/\sqrt{2} - gt \qquad (1b)$$

$$x(t) = v_o(\sin\alpha)t = v_o t/\sqrt{2} \qquad (1c)$$

$$v_x(t) = v_o(\sin\alpha) = v_o/\sqrt{2} \qquad (1d)$$

1.1 - La condizione che ad un istante t_1 la palla colpisca il bersaglio si scrive imponendo nelle espressioni precedenti le condizioni $x(t_1) = l$ e $y(t_1) = H$. Il sistema così ottenuto permette di trovare il tempo $t_1 = l/(v_o \sin\alpha)$ in cui la palla colpisce il bersaglio e il modulo della velocità iniziale:

$$v_o = \sqrt{\frac{gl^2}{2\sin^2\alpha}\frac{1}{l/\tan\alpha - H + h_o}} = \sqrt{\frac{gl^2}{l - H + h_o}} \qquad (2)$$

1.2 - il coseno dell'angolo si ottiene utilizzando la relazione:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{g}\|} = \frac{-v_y(t_1)}{\sqrt{v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1)}} = -\frac{1 - \frac{2gl}{v_o^2}}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{2gl}{v_o^2}\right)^2}} \qquad (3)$$

Soluzione Es. 2

2.1 - La velocità angolare $\omega(t)$ al tempo $t = t_1$ è pari a $\omega(t_1) = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t = 3\,A\,t_1^2 + 2\,B\,t_1 + C$. Il modulo dell'accelerazione centripeta è $\omega^2(t_1)\,R$ e, dunque:

$$|a_c| = R\,(3\,A\,t_1^2 + 2\,B\,t_1 + C)^2 \qquad (1)$$

2.2 - L'accelerazione tangenziale al tempo $t = t_2$ è , invece,

$$|a_t| = \dot{\omega}R = R(6At_2 + 2B) \qquad (2)$$

Soluzione Es. 3 -

3.1- Le equazioni del moto del corpo sui due assi x e z sono:

$$m\,a_x = -\,\gamma v_x \qquad (1)$$

$$m\,a_z = -\,\gamma v_z + m\,g \qquad (2)$$

Dopo un tempo sufficientemente lungo ($t >> m/\gamma$), il moto raggiunge la condizione asintotica per cui $\boldsymbol{v}$ è costante e l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ è nulla. Dalle equazioni precedenti ricaviamo, perciò:

$$v_x = 0 \quad \text{e} \quad v_z = m\,g/\gamma \qquad (3)$$

Dunque, il modulo della velocità asintotica è

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = |v_z| = \frac{mg}{\gamma} \qquad (4)$$

Soluzione Es. 4 --

4.1) se indichiamo con L la lunghezza della molla e con z la distanza del punto P dal soffitto, ciascuna molla esercita una forza $K L$ diretta verso l'alto parallelamente alla lunghezza della molla. Data la simmetria del problema, la forza risultante delle due molle è diretta lungo l'asse z nel verso negativo ed è pari a 2 volte la componente z di ciascuna forza. Dunque, la componente z della forza risultante (è l'unica componente nonnulla) dovuta alle molle è

$$F_z = -2\,K\,L\cos\theta = -2\,K\,L\,z\,/L = -2\,K\,z \qquad (1)$$

All'equilibrio la somma delle forze della molla e della forza peso deve essere nulla. Dunque

$$-\,2\,K\,z + mg = 0 \;\;, \text{cioè,} \qquad z = mg/(2\,K) \qquad (2)$$

4.2) La forza esercitata dalle due molle in eq.(1) è la stessa forza che eserciterebbe una unica molla di costante elastica $K_o = 2\,K$ appesa al soffitto. Ne consegue che il moto della massa m è un moto armonico di oscillazione attorno alla posizione iniziale di equilibrio con pulsazione pari a $\omega = (K_o/m)^{1/2} = (2\,K/m)^{1/2}$ e periodo $T = 2\pi/\omega$. Poichè la massa m parte da ferma, essa passa per il punto di equilibrio dopo un intervallo di tempo pari a $T/4$ e, quindi, il tempo cercato è

$$t = \pi\,[m\,/(8\,K)]^{1/2}$$

Soluzione esercizio 5 ---

5.1) Poichè non ci sono attriti, l'energia meccanica iniziale E_i è uguale a quella finale E_f. Inoltre, poiche' i corpi 1 e 3 non si spostano verticalmente, possiamo non considerare l'energia gravitazionale di entrambi perchè resta sempre costante durante il moto. I valori delle energie E_i e E_f sono:

$$E_i = m_2\,g\,h \qquad (1)$$
$$E_f = K\,h^2/2 + (m_1+m_2)v^2/2 \qquad (2)$$

Imponendo l'uguaglianza delle energie e tenendo conto del fatto che le masse dei corpi sono uguali ad m si trova:

$$v^2 = g\,h - K\,h^2\,/(2\,m) \qquad (3)$$

La (3) ha senso fisico solamente se il membro a sinistra è positivo, in caso contrario $v^2 < 0$ e la (3) non ha soluzione nel campo dei numeri reali. Cio' significa che, se il membro a destra in eq.(3) è negativo il corpo 2 si ferma prima di toccare terra. Dunque il corpo non tocca terra se

$$g\,h - K\,h^2\,/(2\,m) < 0\;, \text{ cioè,} \quad h > h_o = 2\,m\,g\,/K \qquad (4)$$

5.2) Subito dopo che il corpo 2 è lasciato libero di muoversi (istante $t = 0+$), La molla è nella posizione di riposo e non esercita nessuna forza dunque, le equazioni del moto dei due corpi 1 e 2 sono, rispettivamente:

$$T = m_1\,a \qquad (5)$$
$$m_2\,g - T = m_2\,a \qquad (6)$$

sommando membro a membro la (5) e la (6) e tenendo conto della condizione $m_1 = m_2$, si trova dopo semplici passaggi

$a = g / 2$ (7)

5.3) Si può utilizzare la I eq. Cardinale dei sistemi applicata al sistema dei 3 corpi compresa la molla. L'unica forza esterna applicata lungo l'asse x è quella dell'operatore. Dunque, per la I eq. Cardinale, tale forza sarà uguale alla variazione della componente x della quantità di moto totale del sistema. Essendo il corpo 3 sempre fermo, la quantità di moto è solamente dovuta al corpo 1 e al corpo 2. La quantità di moto di 2 è sempre diretta lungo l'asse z. Dunque l'unico contributo alla componente x della quantità di moto totale è quello di m_1 ed è pari a $P_x = m_1\, v$. la derivata temporale di tale quantità di moto è, percio', pari a $m_1\, a$, dove a è l'accelerazione del corpo 1 scritta in eq.(7) . Dunque, per la I cardinale,

$$F_x = m_1\, a = m\, g /2 \qquad (8)$$

Metodo alternativo: Si considera il corpo 3 e le forze agenti su di esso. Il corpo viene mantenuto fermo e, quindi, per la II legge di Newton, la forza totale agente su di esso deve essere nulla. Le forze sono: 1) la forza peso e 2) la reazione normale del piano orizzontale, 3) la forza esercitata dalla molla nel punto di contatto . Questa forza, però è nulla al tempo 0+, 4) la forza esercitata dalla fune sulla carrucola che è in contatto con il corpo, 5) la forza F_x dell'operatore. Le uniche forze con componente x diversa da zero sono la 4) e la 5). Dunque la forza totale lungo x è

$$F_x - T = 0\ , \quad \text{cioè,} \quad F_x = T \qquad (9)$$

dalle relazione (5) e (7) si deduce $T = m\, g /2$ e, quindi, la (9) coincide con la (8)

5.4) Poichè non ci sono attriti, non ci sono forze esterne con componente x agenti sul sistema di corpi 1, 2 e 3. Ne consegue che la componente x della quantità di moto totale si conserva. Inoltre, si conserva anche l'energia. Consideriamo come istante iniziale quello in cui il corpo 2 è fermo ad altezza h e come istante finale quello in cui tocca terra. La componente x della quantità di moto iniziale è nulla, dunque deve essere nulla anche la componente x della quantità di moto finale. Le velocità dei corpi all'istante finale saranno:

$$\boldsymbol{v}_3 = (V,0) \qquad (10)$$
$$\boldsymbol{v}_1 = (V+v_{1r};0) \qquad (11)$$
$$\boldsymbol{v}_2 = (V,v_{2r}) \qquad (12)$$

dove V è la componente x (l'unica componente) della velocità del corpo 3, v_{1r} e v_{2r} sono, invece, i moduli delle velocità relative di m_1 e m_2 rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il corpo 3. l'inestensibilità del filo implica:

$$v_{1r} = v_{2r} = v \qquad (13)$$

Dunque, per la conservazione della quantità di moto lungo l'asse x:

$$m_1\, (v + V) + m_2\, V + m_3\, V = 0 \quad \text{cioè} \quad v = -V\, (m_1 + m_2 + m_3)/m_1 = -\, 3V \qquad (14)$$

Analogamente, la conservazione dell'energia si scrive:

$$m_2\, g\, h = K\, h^2/2 + m_1(V+v)^2 + m_2(V^2 + v^2)/2 + m_3\, V^2/2 \qquad (15)$$

sostituendo nella (15) $m_1 = m_2 = m_3 = m$, il valore di v dato dalla (14) e il valore $h = (m\ g)/(10K)$, si trova

$$|V| = v / 3 = [(19\, m\, g^2)/(1500\, K)]^{1/2} \qquad (16)$$