**Compito di Fisica Generale I di Ingegneria CIVILE** 21 Luglio 2009

**Esercizio 1**:

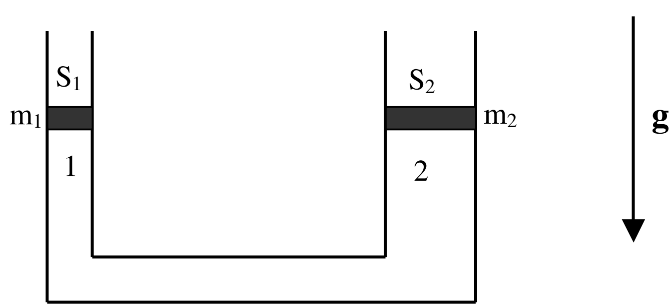
Una piattaforma orizzontale circolare di raggio $R$ = 2 m e massa $M$ = 100 Kg può ruotare senza attrito attorno ad un asse verticale passante per il centro $O$. Un bambino di massa $m$ = 20 Kg si trova inizialmente fermo sul bordo della piattaforma. La piattaforma ruota inizialmente in senso antiorario con velocità angolare $\omega_0$ = 0.5 rad/s.

**1.1**- Quale è il modulo della velocità del centro di massa del sistema bambino + piattaforma? (4 punti)

**1.2**- Quale è il modulo $F$ della forza *orizzontale* che l'asse deve esercitare sulla piattaforma durante il moto di rotazione. (4 punti)

**1.3**- Ad un dato istante, il bambino inizia a camminare ( rispetto alla piattaforma) verso il centro $O$. Conseguentemente, si osserva che la velocità angolare della piattaforma cambia nel tempo. Si trovi la velocità angolare della piattaforma quando il bambino ha raggiunto la posizione centrale. (4 punti)

**Esercizio 2** :
Una leva idraulica è costituita da un tubo ad $U$ come mostrato schematicamente in figura. Il ramo 1 ha sezione $S_1$ = 1 cm$^2$ mentre il 2 ha sezione $S_2$=3$S_1$. All'interno della leva idraulica si trova un fluido di densità $\rho$ = 1 g/cm$^3$ e le due superfici del fluido sono in contatto con due pistoni mobili di masse $m_1$ e $m_2$. Il sistema è esposto all'atmosfera in presenza del campo di gravità diretto come mostrato in figura.




**2.1** - Se si osserva che i due pistoni si trovano in equilibrio alla stessa altezza, quale è il rapporto $r = m_1/m_2$ fra le masse $m_1$ e $m_2$? ( 4 punti)

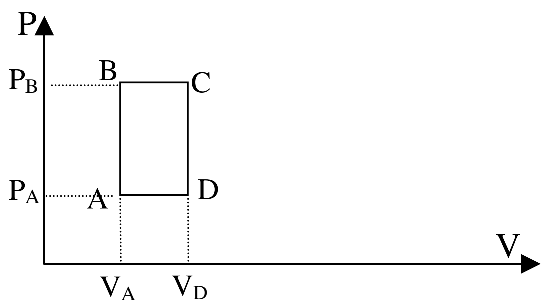
**2.2** - Adesso, supponiamo di applicare una forza $\boldsymbol{F}$ di modulo $F$ = 0.5 N diretta verso il basso sul pistone 1. Conseguentemente il pistone 1 si sposta verso il basso finchè non si raggiunge una nuova configurazione di equilibrio quando il pistone 1 si è spostato di un tratto $\Delta x$ verso il basso. Nell'ipotesi semplificativa che le **masse dei due pistoni siano trascurabili** e che il fluido sia incomprimibile, si trovi il valore di $\Delta x$. (4 punti)

**Esercizio 3**:

Una bomboletta di volume $V_o$ = 1 litro contiene al suo interno un gas perfetto alla temperatura $T$ = 27 °C e alla pressione $p_o$ = 0.1 Atm. Un contenitore vuoto di volume $V_c$ = 3 litri viene collegato alla bomboletta con un tubo di sezione trascurabile in modo che il gas della bomboletta possa entrare nel contenitore. Tutto il sistema (bomboletta+contenitore) è isolato termicamente dall'ambiente circostante.
**3.1** - Si trovi il numero $n$ di moli presenti nel contenitore alla fine del processo. ( 4 punti)
(per la costante dei gas si usi $R$ = 8.32 J/mole K e 1 atmosfera = 1.01 $10^5$ Pa)

**Esercizio 4**:

Un gas perfetto monoatomico compie il ciclo reversibile *ABCDA* mostrato schematicamente in figura dove $V_A = V_B$ = 3 litri, $V_C = V_D = 2V_A$ , $P_A = P_D$ = 1000 pa e $P_B = P_C = 3\ p_A$. La temperatura iniziale del gas è $T_A$= 300 K. (per la costante dei gas si usi $R$ = 8.32 J/mole K)




**4.1** - Si calcoli il calore assorbito dal gas durante il ciclo supponendo che il ciclo venga percorso nel verso *A--B---C--D--A*. (2punti)

**4.2**- Si calcoli il rendimento del gas durante ciclo. (4 punti)

**ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE**.

**Soluzione Esercizio 1**. **1.1**- Il sistema è equivalente a due masse puntiformi $M$ e $m$ poste, rispettivamente nel centro $O$ e il punto $P$ sul bordo della piattaforma dove si trova il bambino. Dunque, il centro di massa si trova in un punto sul segmento $OP$ a distanza $d$ dal centro $O$ pari a:

$$d = \frac{mR + M0}{m+M} = \frac{mR}{m+M} = 0.333 \text{ m} \qquad (1)$$

Il segmento $OP$ ruota in senso antiorario con la velocità angolare $\omega_o$ della piattaforma, dunque, il centro di massa si muove di moto circolare ed uniforme descrivendo una circonferenza di raggio $d$ attorno ad $O$ con velocità:

$$v = \omega_o\, d = 0.167 \text{ m/s} \qquad (2)$$

**1.2** - La I equazione Cardinale della dinamica dei sistemi si scrive nella forma:

$$\mathbf{F}_{\text{tot est}} = (M + m)\, \mathbf{a}_{\text{CM}} \qquad (3)$$

dove $\mathbf{F}_{\text{tot est}}$ rappresenta la somma di tutte le forze esterne e $\mathbf{a}_{\text{CM}}$ rappresenta l'accelerazione del centro di massa. Poichè il CM compie un moto circolare ed uniforme, l'accelerazione è quella centripeta ($\omega_o^2 d$) che è diretta radialmente verso il centro nel piano orizzontale. Dunque anche la risultante delle forze esterne è diretta radialmente. Tale forza può essere solo esercitata dall'asse ( le altre forze: forza peso e reazione normale) sono parallele all'asse e si equilibrano. Quindi in eq.(3) coincide con la forza orizontale esercitata dall'asse $\boldsymbol{F}$. Dunque, in base alla (3), il modulo di $\boldsymbol{F}$ è pari a

$$F = (m + M)\omega_o^2 d = m\omega_o^2 R = 10 \text{ N} \qquad (4)$$

**1.3** - La componente assiale del momento totale delle forze esterne rispetto al centro $O$ è nullo poichè la forza peso e la reazione normale sono dirette lungo l'asse mentre la forza orizzontale esercitata dall'asse di rotazione ha braccio nullo rispetto ad $O$. Ne consegue che il momento angolare del sistema piattaforma+bambino si deve conservare, cioè:

$$I\omega = \text{costante= valore iniziale} \qquad (5)$$

dove $I = MR^2/2 + mx^2$ è il momento di ineria rispetto all'asse passante per $O$ dove $x$ = distanza del bambino dal centro. All'inizio $x = R$, mentre alla fine $x = 0$. Dunque vale l'uguaglianza:

$$(M+2m)\, \omega_o R^2/2 = M\omega R^2/2 \qquad (6)$$

da cui si deduce:

$$\omega = \frac{M+2m}{M}\omega_o = 0.7 \text{ rad/s} \qquad (7)$$

**Soluzione Esercizio 2**. **2.1** - Poichè i pistoni sono in equilibrio, la somma delle forze applicate su ciascuno di essi dall'atmosfera e dal fluido deve essere nulla. Dunque:

$$p_o + m_1\, g/S_1 - p_1 = 0 \qquad (1)$$

$$p_o + m_2\, g/\, S_2 - p_2 = 0 \qquad (2)$$

dove $p_o$ è la pressione atmosferica e $p_1$ e $p_2$ sono, rispettivamente, le pressioni del fluido immediatamente sotto al pistone 1 e 2. Poichè i pistoni sono alla stessa altezza, $p_1 = p_2$. Sottraendo membro a membro la (2) dalla (1), dopo semplici passaggi si trova:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{S_1}{S_2} = 1/3 \qquad (3)$$

**2.2**- In questo caso l'equilibrio delle forze agenti sui due pistoni di massa nulla diventa:

$$p_0 + \frac{F}{S_1} - p_1 = 0 \qquad (4)$$

$$p_0 - p_2 = 0 \qquad (5)$$

Questa volta, però, le pressioni $p_1$ e $p_2$ non sono più uguali perchè i pistoni si trovano ad altezze diverse. Il pistone 1 si è abbassato di $\Delta x$ e, contemporaneamente, il pistone 2 si è sollevato di una quantità $\Delta x_2$ in modo che il volume complessivo di fluido sia restato lo stesso ( fluido incomprimibile). Uguagliando le variazioni di volume nei due rami si trova:

$$\Delta x_2 = \Delta x \, {S_1}/{S_2} \qquad (7)$$

In definitiva, il pistone 2 si trova, rispetto al pistone 1, ad un'altezza

$$\Delta h = \Delta x + \Delta x_2 = \Delta x \left( 1 + {S_1}/{S_2} \right) \qquad (8)$$

Quindi la pressione $p_1$ è maggiore di $p_2 = p_o$ e pari a $p_1 = p_o + \rho g \Delta h$. Sostituendo questo valore nella (4) e tenendo conto della (8) si trova, dopo semplici passaggi algebrici

$$\Delta x = \frac{F}{\rho g S_1 \left( 1 + \frac{S_1}{S_2} \right)} = 38.3 \text{ cm} \qquad (9)$$

**Soluzione Esercizio 3** - Il processo avviene in modo adiabatico poichè il sistema è isolato termicamente ($Q = 0$), inoltre non c'è lavoro fatto dal gas ( *espansione libera*: non ci sono pistoni che si spostano). Per il I Principio della Termodinamica, l'energia interna del gas non cambia, dunque anche la temperatura non cambia e resta sempre uguale a $T = 300$ K. Alla fine, il gas inizialmente presente nella bomboletta di volume $V_o$, si trova distribuito nel volume totale $V_o + V_c$ alla stessa temperatura. Dunque, per la legge di Boyle, la pressione finale sarà pari a

$$p = p_o \frac{V_o}{V_o + V_c} \qquad (1)$$

Per la legge dei gas perfetti, quindi, il numero di moli presenti nel contenitore di volume $V_c = 3$ litri $= 3 \; 10^{-3}$ m$^3$ sarà:

$$n = \frac{pV_c}{RT} = p_o \frac{V_o V_c}{(V_o + V_c) RT} = 3.03 \; 10^{-3} \text{ moli} \qquad (2)$$

**Soluzione Esercizio 4** - **4.1** - Il calore assorbito in un ciclo è pari al lavoro fatto dal gas, cioè all'area interna al ciclo nel diagramma p-V. Dalla figura si deduce:

$$Q = L = (p_B - p_A)(V_D - V_A) = 2 \, p_A V_A = 6 \text{ J} \qquad (1)$$

**4.2**- Per trovare il rendimento $\eta = L / Q_{ass}$, dobbiamo calcolare i calori assorbiti dal gas nei vari rami del ciclo. I calori vengono assorbiti solamente nei rami *AB* e *BC* mentre essi sono ceduti ( ai vari termostati) nei tratti *CD* e *DA* ( in questi tratti il gas si raffredda dopo aver raggiunto la massima temperatura in *C*). Per calcolare i calori assorbiti nei tratti *AB* e *BC* è necessario conoscere le temperature del gas in *B* e *C*. Utilizzando la legge dei gas perfetti, si trova:

$$T_B = T_A \frac{P_B}{P_A} = 3T_A \qquad (2)$$

$$T_C = T_A \frac{P_B}{P_A} \frac{V_C}{V_A} = 6T_A \qquad (3)$$

Per calcolare il calore assorbito nel tratto *AB*, applichiamo il I principio della Termodinamica alla trasformazione *A* ---- *B* e utilizziamo la relazione $p_A V_A = nRT_A$. Dunque

$$Q_{AB} = \Delta U = \frac{3}{2} nR(T_B - T_A) = 3nRT_A = 3 p_A V_A \qquad (4)$$

Analogamente, per il tratto *BC*:

$$Q_{BC} = L + \Delta U = p_B (V_C - V_A) + \frac{3}{2} nR(T_C - T_B) = \left( 3 + \frac{9}{2} \right) nRT_A = \frac{15}{2} p_A V_A \qquad (5)$$

In definitiva, il calore totale assorbito è:

$$Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{BC} = \frac{21}{2} p_A V_A \Longrightarrow \qquad \eta = \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{Q}{Q_{ass}} = \frac{4}{21} = 0.190 \qquad (6)$$