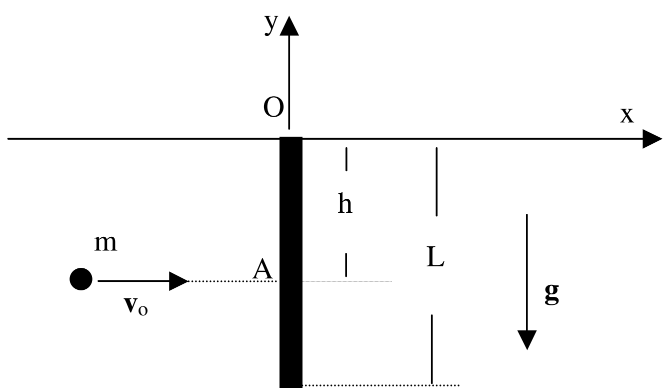
Compito di Fisica Generale I di Ingegneria CIVILE 2009   12 Giugno 2009

Esercizio 1: Un asse è disposto orizzontalmente e passante per il punto O in figura. L'asse è perpendicolare al piano della figura. Una barretta di massa m = 200 g e lunghezza L = 30 cm è libera di ruotare attorno all'asse passante per un estremo della barretta in presenza del campo di gravità diretto come in figura. Un proiettile di massa m viene sparato con velocità di modulo v_o = 1 m/s lungo l'asse x e urta contro la barretta nel punto A a distanza h = 10 cm dall'estremo O della barretta. Dopo l'urto il proiettile rimane conficcato nella barretta.



1.1 - Si calcoli la velocità angolare ω della barretta dopo l'urto. (punteggio: 3)

1.2 - Si trovi la distanza del centro di massa del sistema barretta+proiettile dal punto O dopo l'urto. (punteggio 3)

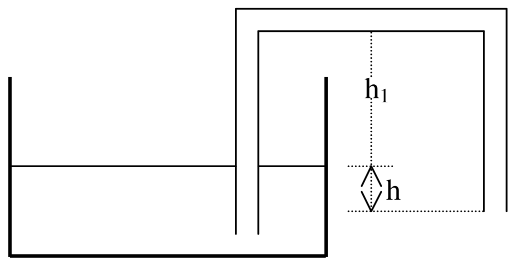
1.3 - Si trovi quale è il massimo angolo di rotazione θ_m della barretta rispetto alla posizione iniziale nel moto successivo all'urto(punteggio 4)

1.4 - Si trovi l'impulso della forza (componente x e componente y)esercitata dalla barretta sull'asse passante per O durante l'urto. (punteggio 4)

Esercizio 2. Per estrarre acqua da un **grosso** serbatoio si utilizza un tubo di raggio interno r = 1cm curvato ad U come schematizzato in figura (sifone). Si aspira nel tubo fino a che l'acqua non inizia ad uscire, dopodichè l'acqua continua ad uscire da sola. Per semplicità si assuma il flusso stazionario e si consideri trascurabile l'attrito viscoso.

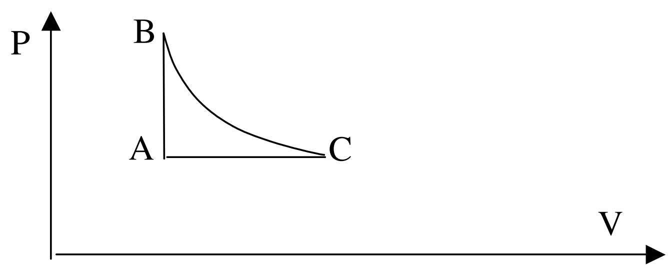
2.1 - Se l'altezza h in figura è h = 3m, dopo quanto tempo si riempie una bottiglia da un litro? (punteggio 3)

2.2 - Si trovi il valore massimo dell' altezza h_1 mostrata in figura che si può raggiungere se si vuole che il flusso di acqua si possa mantenere ? (la pressione in ogni punto del fluido non può mai diventare inferiore a 0 Pa). (punteggio 3)



Si assuma $\rho = 1000$ kg/m^3 per la densità dell'acqua, e $p_o = 1.01\ 10^5$ Pa per la pressione atmosferica.

Esercizio 3. Un gas monoatomico ideale si trova inizialmente nello stato A a pressione $P_A = 100$ Pa e volume $V_A = 1$ litro. Il gas compie il ciclo $ABCA$ dove la trasformazione AB è isocora con $p_B = 2p_A$, quella BC è isoterma e quella CA è isobara.



3.1 - Si trovi il volume V_C occupato dal gas nello stato C. (punteggio 3)

3.2 - Si trovi il calore totale Q_{Tot} assorbito dal gas nell'intero ciclo. (punteggio 3)

3.3 - Si trovi il rendimento associato con il ciclo reversibile $ABCD$. (punteggio 4)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1.

1.1- Durante l'urto si conserva il momento di quantità di moto del sistema costituito dal corpo di massa m e dalla barretta rispetto all'asse passante per O (l'unica forza impulsiva agente sul sistema è la forza esercitata dall'asse che ha momento nullo rispetto ad O).

$$mv_o h = mvh + I_O \omega \qquad (1)$$

dove v = velocità corpo, ω = velocità angolare barretta e $I_O = mL^2/3$ = momento di inerzia della barretta rispetto ad O. Ricordando che $v = \omega h$, dalla (1) si deduce:

$$\omega = \frac{v_o h}{h^2 + \frac{L^2}{3}} = 2.50 \text{ rad/s} \qquad (2)$$

1.2- La barretta è equivalente ad un corpo puntiforme di massa m posto a distanza $L/2$ da O. Dunque, la distanza d_{CM} del centro di massa da O è:

$$d_{CM} = \frac{m\frac{L}{2} + mh}{2m} = \frac{\frac{L}{2} + h}{2} = 0.125 \text{ m} \qquad (3)$$

1.3- Non essendoci attriti, dopo l'urto si conserva l'energia meccanica del sistema. All'istante iniziale (subito dopo l'urto), se prendiamo O come punto di energia gravitazionale nulla, l'energia meccanica è:

$$E_i = -2mgd_{CM} + \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (4)$$

dove ω è la velocità angolare calcolata in (2) e I è il momento di inerzia del sistema barretta+proiettile rispetto all'asse passante per O:

$$I = mh^2 + m\frac{L^2}{3} = 8.00\ 10^{-3} \text{ kg m}^2 \qquad (5)$$

Se la barretta si ferma durante il moto successivo all'urto, allora nel punto in cui si ferma individuato dall'angolo θ_m, la sua energia è solamente potenziale e pari a:

$$E_f = -2mgd_{CM} \cos\theta_m \qquad (6)$$

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica ($E_i = E_f$),si trova:

$$\cos\theta_m = 1 - \frac{I\omega^2}{4mgd_{CM}} \qquad (7)$$

La (7) ammette soluzione solamente se cos θ_m > -1 (il coseno è sempre compreso fra-1 e 1). Dunque, la barretta si fermerà solamente se $I\omega^2 < 4mgd_{CM}$. Se questa condizione è verificata, la barretta si ferma all'angolo:

$$\theta_m = \arccos\left(1 - \frac{I\omega^2}{4mgd_{CM}}\right) = 18° \qquad (8)$$

1.4- L'unica forza impulsiva esterna agente sul sistema barretta+proiettile può essere esercitata solamente dall'asse passante per O. Dunque, l'impulso di tale forza è pari alla variazione della quantità di moto del sistema durante l'urto ($\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i$ dove $\boldsymbol{p}_f$ = quantità di moto finale e $\boldsymbol{p}_i$ =quantità di moto iniziale). Per il *principio di azione e reazione*, l'impulso $\boldsymbol{I}$ esercitato dalla barretta sull'asse è uguale ed opposto al precedente cioè:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_f \qquad (9)$$

dove

$$\boldsymbol{p}_i = (mv_o, 0) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{p}_f = 2m\boldsymbol{v}_{CM} = (2md_{CM}\omega, 0) \qquad (10)$$

dove $\boldsymbol{v}_{CM}$ = velocità del centro di massa del sistema barretta+proiettile subito dopo l'urto e d_{CM} e ω sono calcolati in (3) e (2), rispettivamente. L'impulso cercato è, perciò:

$$\boldsymbol{I} = (mv_o - 2md_{CM}\ \omega, 0) =(0.075 \text{ N},0 \text{ N}) \qquad (11)$$

Soluzione Esercizio 2 :

2.1- Applicando il teorema di Bernulli ad un tubo di flusso che parte dal punto *A* sulla superficie dell'acqua, entra nel tubo ed esce in *B*, si trova:

$$\rho gh + \frac{\rho}{2} v_A^2 + p_o = \frac{\rho}{2} v_B^2 + p_o \qquad (1)$$

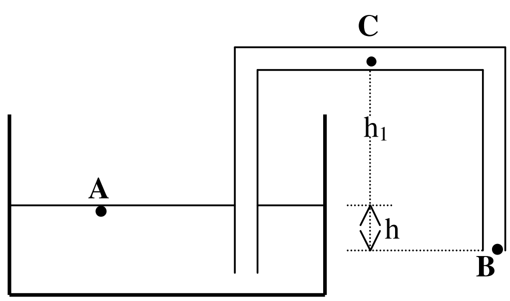
dove p_o = pressione atmosferica. Inoltre, poichè il serbatoio è molto ampio, per l'equazione di continuità, la velocità del fluido in *A* è trascurabile (v_A =0 in eq.(1)), dunque:

$$\frac{\rho}{2} v_B^2 = \rho gh \quad \Longrightarrow \quad \text{la portata del tubo è} \quad P = \pi r^2 v_B = \pi r^2 \sqrt{2gh} = 2.41\ 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s} \qquad (2)$$

Dunque, il tempo per riempire la bottiglia di volume $V = 10^{-3}$ m^3 è

$$t = V/P = 0.415\ \text{s} \qquad (3)$$

2.2 - La pressione del fluido diminuisce all'aumentare della sua altezza rispetto a *B*, dunque, la pressione è minima e pari a p_{min} nel punto più alto del tubo dove la velocità del fluido è la stessa del punto *B*. Il valore della pressione minima si ottiene ancora applicando il Teorema di Bernulli al punto *B* e al punto più alto del tubo (*C* in figura):



$$\frac{\rho}{2} v_B^2 + p_o = \frac{\rho}{2} v_B^2 + p_{min} + \rho g(h + h_1) \qquad (4)$$

Dunque, $p_{min} = p_o - \rho g(h + h_1)$

Dunque, $p_{min} > 0$ se

$$h_1 \le h_{max} = \frac{p_o}{\rho g} - h = 7.31\ \text{m} \qquad (5)$$

Soluzione Esercizio 3.

3.1- Per la legge dei gas perfetti, tenendo conto che $V_B=V_A$ e $P_B=2P_A$, si scrive:

$$P_A V_A = nRT_A \qquad (1)$$

$$2P_A V_A = nRT_B \qquad (2)$$

facendo il rapporto membro a membro fra la (2) e la (1), si trova

$$T_B = 2\ T_A \qquad (3)$$

D'altra parte, applicando ancora la legge dei gas perfetti al punto *C* e tenendo conto che $P_C=P_A$ e $T_C=T_B=2\ T_A$, si trova:

$$P_A V_C = 2nRT_A \qquad (4)$$

Facendo il rapporto membro a membro fra la (4) e la (1) si trova:

$$V_C = 2\ V_A = 2\ 10^{-3}\ \text{m}^3 \qquad (5)$$

3.2- Poichè la variazione di energia in un ciclo è nulla, il calore totale assorbito dal gas è pari al lavoro totale fatto dal gas. Tale lavoro è la somma algebrica del lavoro positivo fatto nell'espansione isoterma e del lavoro negativo fatto nella compressione isobarica, cioè:

$Q_{Tot} = nRT_B \ln(V_C/V_B) - P_A(V_C - V_A)$ (6)

Tenendo conto delle relazioni precedentemente trovate: $T_B = 2T_A$, $V_C = 2V_A$, $V_B = V_A$ e $P_AV_A = nRT_A$, si trova:

$Q_{Tot} = P_AV_A\,(2 \ln 2 - 1) = 3.86\ 10^{-2}$ J (7)

3.3- Il rendimento è pari a $L/Q_{ASS} = Q_{Tot}/Q_{ASS}$, dove Q_{ASS} è il calore assorbito dalle sorgenti termiche. Il calore viene assorbito dalle sorgenti nel tratto *AB* e in quello *BC*, mentre esso viene ceduto alle sorgenti nel tratto *CA* (calore negativo).

$Q_{AB} = \Delta U = 3nR(T_B - T_A)/2 = 3nRT_A/2 = 3P_AV_A/2 = 1.5\ 10^{-1}$ J (8)

$Q_{BC} = L_{BC} = nRT_B \ln(V_C/V_B) = 2P_AV_A \ln 2 = 1.39\ 10^{-1}$ J (9)

Dunque, il rendimento del motore termico è:

$$\eta = \frac{L}{Q_{AB} + Q_{BC}} = \frac{Q_{Tot}}{Q_{AB} + Q_{BC}} = 1.34\ 10^{-1}$$