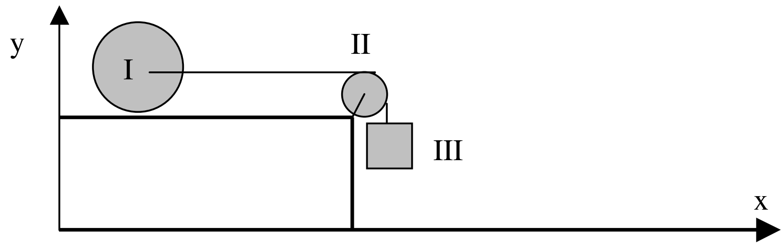
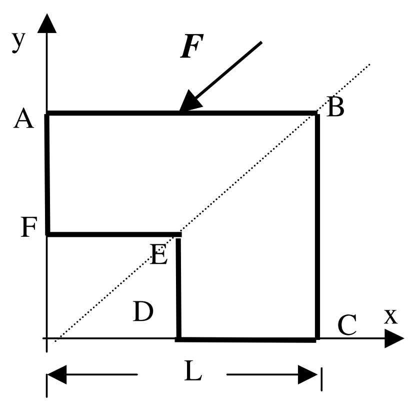
Compito di Fisica Generale I di Ingegneria CIVILE 30 giugno 2009.

Esercizio 1:Un sistema è costituito da due corpi (I e III) e una carrucola (II) di masse m_I = 1Kg, m_{II} = 2 Kg e m_{III} =1 kg disposte come mostrato in figura in presenza del campo di gravità terrestre. La massa I ha forma cilindrica di raggio R_I = 10 cm e la carrucola ha raggio R_{II} =5 cm ed è libera di ruotare senza attrito atorno al suo asse. Ad un dato istante, la massa III viene lasciata libera. La fune che collega le masse è di massa trascurabile ed inestensibile. Il corpo III si trova inizialmente ad altezza h = 2 m da terra.



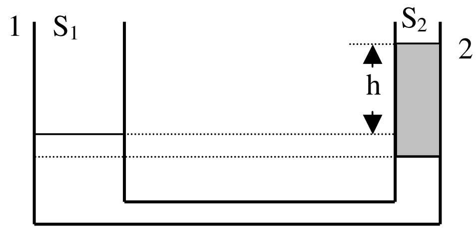
1.1- Si trovi la velocità con cui la massa III arriva a terra nell'ipotesi che il moto della massa I sia un rotolamento puro. (3 punti).
1.2 - Si trovi l'accelerazione del corpo III ad ogni istante durante la caduta. (4 punti)
1.3- Si trovi il minimo valore che deve avere il coefficiente di attrito statico μ del piano su cui è appoggiata la massa I se si vuole che il moto sia di rotolamento puro. (3 punti)

Esercizio 2 - Ad una piastra **quadrata** di spessore d = 1 cm, lato L = 1 m e densità uniforme ρ = 2000 Kg/m^3 viene tolto un bordo **quadrato** di lato L_1 = L/2 = 0.5 m come mostrato schematicamente in figura.



2.1 - Si trovi la coordinata x del centro di massa. (4 punti)
2.2 - Se si applica una forza ***F*** di 5 N in un punto al centro del lato AB diretta parallelamente all'asse diagonale EB, si trovi il valore della componente z (con il corretto segno!) del momento di forza rispetto al centro di massa della piastra (z è **l'asse uscente** dalla figura). (3 punti)

Esercizio 3- Un tubo ad U ha sezioni S_2 = 1 cm^2 e S_1 = 3 S_2 ed è aperto alle due estremità e in contatto con l'atmosfera. Nel tubo viene immessa una certa quantità di mercurio di densità ρ_m = 13.6 g/cm^3. Dopodichè nella parte del tubo di sezione S_2, vengono versati M_L = 100 g di un liquido diverso e, in condizioni di equilibrio, si osserva che la superficie libera del fluido nel ramo 2 si trova ad un'altezza h = 20 cm rispetto a quella del mercurio nel lato 1.



3.1 - Quale è la densità ρ_L del liquido? (5 punti)

Esercizio 4 - Due sorgenti monocromatiche identiche S_1 e S_2 di onde acustiche assunte puntiformi si trovano su un asse x nei punti x_1 = - L = - 0.3 m e x_2 = L = 0.3 m. La velocità di fase delle onde nel mezzo è 340 m/s. Si osserva che nel punto di mezzo fra le sorgenti (x = 0) l'intensità sonora è nulla.

4.1 - si dica quale è la differenza di fase fra le due sorgenti emettitrici. (4 punti)

4.2 - Si osserva, inoltre, che l'intensità è minima (interferenza distruttiva) in tutti i punti dell'asse x a destra della sorgente S_2 ($x > L$). Si dica quale è il valore minimo possibile per la frequenza delle onde. (4 punti)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1- **1.1**- Nel rotolamento puro non c'è dissipazione di energia e, dunque, si conserva l'energia meccanica. I corpi I e II restano sempre alla stessa altezza rispetto al suolo e, perciò, la loro energia potenziale gravitazionale resta costante e puo' essere trascurata. L'energia iniziale del sistema è solo pari all'energia gravitazionale della massa III: $E_i = m_{III}gh$ (1)

Quando la massa arriva a terra (immediatamente prima), l'energia è solamente cinetica e pari alla somma delle energie cinetiche dei tre corpi.

$$E_f = \frac{1}{2}m_I v^2 + \frac{1}{2}\frac{m_I R_I^2}{2}\omega_I^2 + \frac{1}{2}\frac{m_{II} R_{II}^2}{2}\omega_{II}^2 + \frac{1}{2}m_{III}v^2 \qquad (2)$$

dove $\omega_I = v/R_I$ e $\omega_{II} = v/R_{II}$. Sostituendo questi valori nella (2) si trova

$$E_f = \frac{1}{4}(3m_I + m_{II} + 2m_{III})v^2 \qquad (3)$$

Imponendo l'uguaglianza delle energie ($E_i = E_f$) si trova: $v = \sqrt{\dfrac{4m_{III}gh}{(3m_I + m_{II} + 2m_{III})}}$ = 3.35 m/s

1.2 - Le equazioni del moto per il corpo I sono:

$$T_1 + F_s = m_I \dot{v} \qquad (4)$$

dove $\dot{v}$ è l'accelerazione del corpo III e l'equazione dei momenti

$$F_s R_I = -\frac{m_I R_I^2}{2}\dot{\omega} = -\frac{m_I R_I}{2}\dot{v} \quad \Longrightarrow \quad F_s = -\frac{m_I}{2}\dot{v} \qquad (5)$$

dove T_1 è la tensione nel tratto di corda che collega *I* e *II* e F_s è la componente *x* della forza di attrito statico agente su *I*.

Sostituendo la (5) nella (4) si trova: $T_1 = \dfrac{3}{2}m_I\dot{v}$ (6)

L'equazione del moto della carrucola è:

$$(T_2 - T_1)R_{II} = m_{II}\frac{R_{II}^2}{2}\dot{\omega}_{II} = \frac{m_{II}R_{II}}{2}\dot{v} \quad \Longrightarrow \quad T_2 - T_1 = \frac{m_{II}}{2}\dot{v} \qquad (7)$$

dove T_2 è la tensione del trato di fune che collega il corpo II con III. Dalla(7) e (6) si deduce:

$$T_2 = \left(\frac{3}{2}m_I + \frac{m_{II}}{2}\right)\dot{v} \qquad (8)$$

Infine, l'equazione del moto del corpo III è:

$$m_{III}g - T_2 = m_{III}\dot{v} \quad \Longrightarrow \quad \dot{v} = \frac{m_{III}g}{\left(\frac{3}{2}m_I + \frac{1}{2}m_{II} + m_{III}\right)} = 2.8 \text{ m/s}^2 \qquad (9)$$

1.3-Sostituendo l'accelerazione in (9) nella (5) si trova che la forza di attrito statico necessaria per mantenere il corpo in rotolamento è

$$F_s = -\frac{m_I m_{III} g}{(3m_I + m_{II} + 2m_{III})} \qquad (10)$$

dove il segno - indica che la forza è diretta in verso opposto all'asse *x*. La forza di attrito in modulo deve essere inferiore a μm_Ig, dunque il corpo I può rotolare solamente se $\mu = \dfrac{m_{III}}{(3m_I + m_{II} + 2m_{III})}$ = 1/7 = 0.143

Soluzione Esercizio 2. **2.1**- Una piastra quadrata piena di lato *L* può essere pensata come la sovrapposizione della piastra dell'esercizio (con il taglio quadrato) di massa *M* e una piastra quadrata di lato L_1 e massa M_1. Indicando con x_p la coordinata *x* del centro di massa della piastra piena e con $M_p = M_1 + M$ la sua massa, con x_1 la coordinata *x* del CM della piastra di lato L_1 e con *x* quella della piastra con il taglio quadrato, si scrive: $x_p = \dfrac{M_1 x_1 + Mx}{M + M_1}$ (1)

dove $M_1 = \rho\, d\, L_1^2$ e $M = \rho\, d(L^2 - L_1^2)$ da cui si deduce:

$$x = \frac{L^2 x_p - L_1^2 x_1}{2(L^2 - L_1^2)} \qquad (2)$$

Ora, per simmetria, $x_p = L/2$ e $x_1 = L_1/2$, dunque la (2) diventa:

$$x = \frac{L^3 - L_1^3}{L^2 - L_1^2} = 0.583 \text{ m} \qquad (3)$$

2.2- Per simmetria, il centro di massa si trova sull'asse *EB*, che è un asse di simmetria. La forza è diretta parallelamente a tale asse e, quindi, il momento di forza rispetto al centro di massa è pari in modulo al prodotto del modulo della forza per la distanza del punto di applicazione dall'asse (braccio della forza *b*). Dalla figura si deduce immediatamente $b = \frac{L}{2\sqrt{2}} =$ 0.354 m. Ne consegue che il modulo del momento di forza è $\Gamma = \frac{FL}{2\sqrt{2}} =$ 1.77 N m (4)

Dalla regola della mano destra si deduce che il momento di forza è diretto lungo l'asse z nel verso positivo, quindi, la componente *z* è: $\Gamma_z = \Gamma = +1.77$ N m.

Soluzione esercizio 3.

3.1- Le pressioni nel mercurio in due punti che si trovano allo stesso livello di altezza nei due rami devono essere uguali. In particolare, se consideriamo un punto *O'* sulla superficie di separazione fra il liquido sconosciuto e il mercurio nel ramo 2, la pressione nel punto alla stessa altezza *O* nel ramo 1 deve essere la stessa. Indicando con h_1 l'altezza del mercurio nel ramo 1 rispetto ad *O*, si trova:

$$p_o + \rho_L g(h+h_1) = p_o + \rho_m g h_1 \quad \Longrightarrow \quad \rho_L(h+h_1) = \rho_m h_1 \tag{1}$$

D'altra parte, l'altezza totale del fluido è $h_1+h = M_L/(\rho_L S_2)$ e,dunque:

$$h_1 = \frac{M_L}{\rho_L S_2} - h \tag{2}$$

sostituendo h_1 dato in (2) nella (1) si ottiene dopo semplici passaggi:

$$\rho_L = \frac{\rho_m}{1+\frac{\rho_m S_2 h}{M_L}} = 3.66\ 10^3\ \text{Kg/m}^3 = 3.66\ \text{g/cm}^3 \tag{3}$$

Soluzione Esercizio 4 -

4.1 - Indichiamo con φ_{10} e φ_{20} i coefficienti di fase delle due onde monocromatiche. Il punto $x = 0$ si trova alla stessa distanza L dalle due sorgenti, dunque, le fasi delle due onde nel punto $x = 0$ sono, rispettivamente:

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + 2\pi L/\lambda \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \varphi_{20} + 2\pi L/\lambda \tag{1}$$

Poichè in $x = 0$ si ha uno zero di intensità, la differenza di fase φ_1-φ_2 deve essere uguale ad un multiplo dispari di π. Dunque

$$\varphi_{10} - \varphi_{20} = \pm 2n\pi + \pi \tag{2}$$

con $n = 0,1,2$ ...., cioè le due sorgenti sono in controfase l'una con l'altra.

4.2 - Un generico punto $x > L$ sull'asse si trova a distanza $d_1 = x + L$ dalla sorgente 1 e a distanza $d_2 = x - L$ dalla sorgente 2. Poichè l'interferenza è distruttiva, la differenza di fase deve essere un multiplo dispari di π, cioè:

$$\varphi_{10} - \varphi_{20} + \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) = \pm 2k\pi + \pi \tag{3}$$

dove $k = 0,1,2$ ... è un intero. Sostituendo la (2) nella (3) e tenendo conto dell'uguaglianza d_1-d_2=2L, si trova

$$\lambda = \frac{2L}{m} \tag{4}$$

dove m può assumere i valori $m = 1,2$ ....Corrispondentemente, le frequenze possibili sono date da :

$$\nu = \frac{v_s}{\lambda} = \frac{v_s m}{2L} \tag{5}$$

La frequenza minima si ha per m =1 in eq.(5) ed è pari a :

$$\nu_{\min} = \frac{v_s}{2L} = 567\ \text{Hz} \tag{6}$$