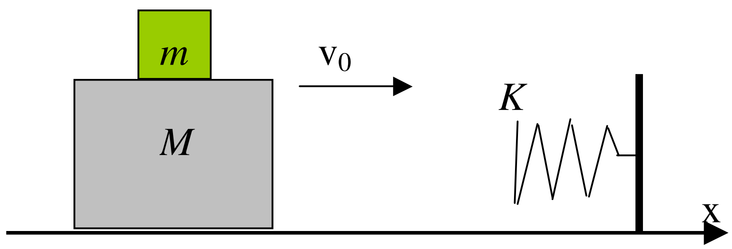
Compito di Fisica Generale I di Ingegneria CIVILE gennaio ? 2010.

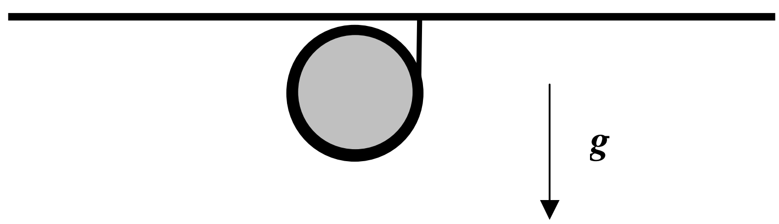
Esercizio 1: Un cubo di massa M = 3 kg si muove liberamente con velocità v_0 nel verso positivo dell' asse x orizzontale scivolando su un piano orizzontale privo di attrito. Un cubetto di massa m = 0.5 kg è appoggiato sul cubo come mostrato in figura e fra i due c'è un coefficiente di attrito statico pari a μ_s = 0.3. Ad un dato istante t = 0 il cubo inizia a toccare la molla di costante elastica K = 100 N/m inizialmente a riposo.



1.1- Si dica quale è il massimo valore v_{max} che deve avere la velocità v_0 perchè il cubetto non scivoli mai sul cubo. (5 punti)

1.2 - Supponendo, ora, che v_0 = 1 m/s ($v_0 > v_{max}$) , si dica a quale istante $t = t_0$ il cubetto inizia a scivolare sul cubo. (5 punti)

Esercizio 2 - Su un cilidretto di raggio R = 1 cm e massa m = 0.3 kg è avvolto un filo inestensibile di lunghezza L = 1m. Un'estremità del filo è fissata sulla superfice del cilindretto mentre l'altra estremità è fissata al soffitto. Inizialmente il filo è totalmente avvolto sul cilindretto e il cilindretto viene tenuto fermo. Al tempo t = 0 il cilindretto viene lasciato libero di cadere.



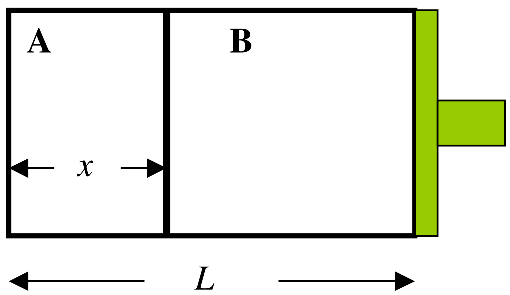
2.1 - Si dica quale è la velocità massima raggiunta dal cindretto nella caduta (si trascuri il piccolo tratto di filo inizialmente srotolato). (4 punti)

2.2 - Arrivato alla fine della corsa, il cilindretto rimbalza indietro elasticamente. Si dica a quale tempo il cilindretto torna nella posizione iniziale. (4 punti)

2.3- Supponendo che l'intervallo di tempo durante il quale avviene il "rimbalzo" sia pari a Δt = 0.001 s, si dica quale è la tensione media che deve esercitare il filo durante questo intervallo. (2 punti)

)

Esercizio 3- Un cilindro di sezione S =10 cm^2 è costituito da pareti conduttrici di calore ed è diviso in due parti da una parete libera di muoversi che conduce il calore. Ad un estremità del cilindro si trova un pistone anch'esso buon conduttore. Il cilindro è immerso in un termostato a temperatura T = 300 K. Nei due spazi A e B sono presenti, rispettivamente, n_A = 0.1 moli e $n_B = 2\ n_A$ moli di gas perfetto.



3.1 - Sapendo che la lunghezza totale del cilindro è L = 30 cm, si calcoli il valore della lunghezza x in figura all'equilibrio. (2 punti)

3.2 - Ad un dato istante, il pistone viene spostato in modo reversibile in modo da comprimere il gas finchè la lunghezza L si è ridotta a L/3. Si calcoli il lavoro <u>fatto dall'operatore</u>. (si sfrutti il fatto che, in una trasformazione reversibile il sistema si trova istante per istante in equilibrio termico e meccanico) (4 punti)

3.3 - Si calcoli il calore totale Q assorbito dai gas durante la trasformazione. (2 punti)

3.4 - Si calcoli il lavoro totale fatto dai gas sulla parete mobile interna durante l'intera trasformazione. (2 punti)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1- **1.1**- Se il cubetto resta fermo rispetto al cubo, allora il sistema, dopo il tempo t = 0, si comporta come un unico corpo di massa M_T= 3.5 kg collegato ad una molla di costante elastica K. Di conseguenza, il sistema tende a oscillare armonicamente con pulsazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M_T}} = 5.35 \qquad \text{rad/s} \qquad (1)$$

Inizialmente la massa rallenta fino a fermarsi quando raggiunge il punto di massima compressione $\Delta x_{\max}$ della molla che si ottiene imponendo la conservazione dell'energia meccanica.

$$\frac{1}{2}M_T v_0^2 = \frac{1}{2}K\Delta x_{\max}^2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta x_{\max} = v_0\sqrt{\frac{M_T}{K}} = \frac{v_0}{\omega} \qquad (2)$$

In tale posizione l'accelerazione del cubetto è massima e pari in modulo a $K\Delta x_{\max}/M_T = \omega v_0$. Perchè il cubetto possa avere questa accelerazione è necessari che la forza di attrito aagente su di esso possa raggiungere il valore:

$$F_a = ma_{\max} = m\omega v_0 \qquad (3)$$

D'altra parte, la massima forza di attrito è $F = \mu_s\, m\, g$, dunque $F_a < F$ solo se

$$v_0 \le v_{\max} = \frac{\mu_s g}{\omega} = 0.55 \text{ m/s} \qquad (4)$$

1.2 - La velocità in un moto armonico ha la forma generale:

$$v = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (5)$$

Nel presente caso, la velocità è massima al tempo t = 0, dunque φ = 0. Inoltre, poichè v (t =0) = v_0, si deduce $A = v_0$. Dunque:

$$v = v_0\cos(\omega t) \qquad (6)$$

Il modulo dell'accelerazione ad ogni istante (finchè il cubo grande resta attaccato alla molla) è:

$$|a| = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \omega\, v_0 \sin \omega t \qquad (7)$$

Il cubetto inizia a scivolare quando il modulo della forza di attrito necessaria per far accelerare il cubetto con l'accelerazione (7) supera il massimo valore $F = \mu_s\, m\, g$, cioè al tempo t_0 in cui :

$$\omega v_0 \sin \omega t_0 = \mu_s g \quad \Longrightarrow \quad t_0 = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{\mu_s g}{\omega v_0}\right) = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{v_{\max}}{v_0}\right) = 1.09 \text{ s.} \qquad (8)$$

Soluzione Esercizio 2. **2.1**- Prendiamo come 0 dell'energia potenziale la posizione iniziale del centro di massa. Poichè il cilindro è inizialmente fermo, l'energia meccanica iniziale è

$$E_i = 0 \qquad (1)$$

La massima velocità verrà raggiunta quando il filo si è totalmente srotolato, cioè quando il centro di massa è sceso di una lunghezza pari a L (si trascura il tratto di filo inizialmente srotolato). Dunque, l'energia meccanica finale è

$$E_f = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{\max}^2 - mgL \qquad (2)$$

Dove $I = mR^2/2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto al C.M. Per la conservazione dell'energia meccanica, $E_f = E_i$ =0. Inoltre, il moto del cilindro è di rotolamento e, quindi $v = \omega R$ ad ogni istante. Ne consegue, dopo semplici passaggi algebrici,

$$E_f = \frac{3}{4}mv_{\max}^2 - mgL \quad \Longrightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{4gL}{3}} = 3.61 \text{ m/s} \qquad (3)$$

2.2- Si applica al cilindro la I e II equazione cardinale della dinamica considerando come polo il C.M. Dunque:

$$mg - T = ma \qquad (4)$$

$$TR = I\alpha = \frac{mRa}{2} \qquad (5)$$

dove T = tensione del filo. Ricavando T dalla (5) e sostituendo nella (4) si trova:

$$a = \frac{2}{3} g \qquad (6)$$

Dunque, il sistema si muove di moto uniformemente accellerato e raggiunge il punto di massimo allungamento del filo al tempo t_0 tale che:

$$L = \frac{1}{2} a t_0^2 \quad \Longrightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{3L}{g}} \qquad (7)$$

Dopodichè il cilindro rimbalza elasticamente e, dopo un intervallo di tempo ancora pari a t_0, ritorna nella posizione iniziale. Il tempo totale è, perciò:

$$\Delta t = 2t_0 = 2\sqrt{\frac{3L}{g}} = 1.11 \text{ s} \qquad (8)$$

2.3- La quantità di moto del cilindretto subito prima del rimbalzo è $\boldsymbol{p} = m v_{\max} \boldsymbol{k}$, dove $\boldsymbol{k}$ è il versore diretto nel verso della gravità. Dopo il rimbalzo, la q. m. cambia segno, dunque la tensione media è

$$T = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2 m v_{\max}}{\Delta t} = 2.17\ 10^3 \text{ N} \qquad (9)$$

Soluzione esercizio 3.

3.1- L'equilibrio meccanico si raggiunge quando le pressioni dei due gas p_A e p_B sono uguali. Per la legge dei gas perfetti si deduce:

$$\frac{n_A}{V_A} = \frac{n_B}{V_B} \quad \Longrightarrow \quad V_B = 2V_A \qquad (1)$$

D'altra parte, $V_A + V_B = SL$,dunque, dopo semplici passaggi algebrici si trova:

$$x = \frac{V_A}{S} = \frac{L}{3} = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m} \qquad (2)$$

3.2 - Poichè la trasformazione è reversibile, ad ogni istante il sistema deve soddisfare l'equilibrio meccanico e termico. Dunque la temperatura dei due gas è sempre T = 300 K e le pressioni sono fra loro uguali. Dunque, ad ogni istante resta verificata la (1). In particolare, se y è la lunghezza totale ad un generico istante ($y = L$ inizialmente), allora si deduce

$$x = \frac{y}{3} \qquad (3)$$

Ne consegue che la pressione p_B del gas nel settore B a contatto con il pistone è pari a

$$p_B = \frac{3 n_A R T}{S y} \qquad (4)$$

Il lavoro fatto dall'operatore è uguale ed opposto al lavoro fatto dal gas B ed è, quindi:

$$L_{op} = -\int_L^{L/3} p_B \, dV = -\int_L^{L/3} \frac{3 n_A R T}{y} dy = 3 n_A R T \ln 3 = 822 \text{ J} \qquad (5)$$

3.3 - Poichè la trasformazione è isoterma (ΔU =0), il calore assorbito dal gas è pari al lavoro da esso fatto ($L_{gas} = -L_{op}$). Dunque:

Q = - 822 J

3.4 - La forza totale agente sulla parete interna è nulla poichè le pressioni nei due scomparti A e B sono uguali ad ogni istante (equilibrio meccanico). Ne consegue che il lavoro fatto sulla parete interna è nullo.