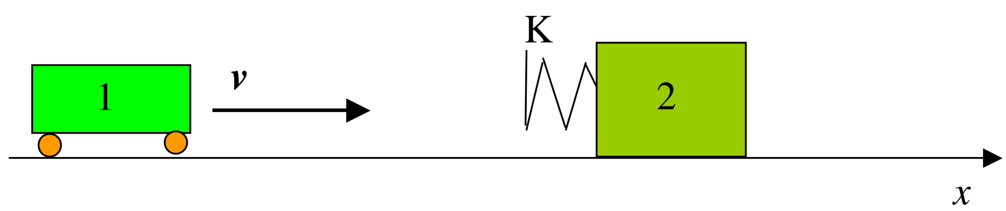
Compito di Fisica Generale I di Ingegneria CIVILE 14 settembre 2010.

Esercizio 1: Il carrello 1 di massa m = 50 kg viaggia su delle rotaie con attrito trascurabile nel verso positivo dell'asse x. Ad un dato istante $t = 0$ il carrello tocca una molla di costante elastica $K = 10^4$ N/m collegata ad un corpo (2) di massa identica a quella del carrello e appoggiato al suolo. Fra il corpo 2 e il suolo c'è attrito con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.5$.



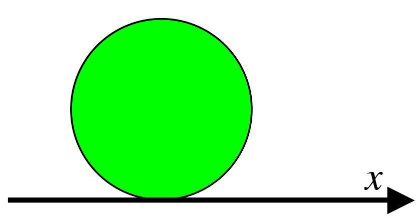
1.1- Quale è la massima velocità v_{max} che può avere il carrello se si vuole che il corpo 2 resti fermo?. (4 punti)

1.2 - Si supponga ora che la velocità del carrello sia v = 1 m/s ($v > v_{max}$), si dica a quale istante t (t = 0 è il momento del contatto con la molla) il corpo 2 inizia a muoversi. (4)

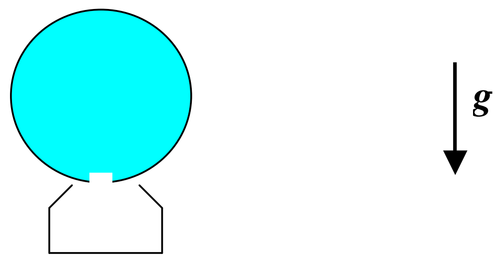
Esercizio 2 - Un cilindro omogeneo ha raggio r = 20 cm, massa m = 3 Kg ed è appoggiato su un piano orizzontale ruvido. Sull'asse del cilindro è applicata una coppia di momento τ = 1 N m diretto nel verso entrante rispetto al piano della figura. Nell'ipotesi che il moto del cilindro sia di puro rotolamento, si calcoli:

2.1 - L'accelerazione del cilindro dicendo se è nel verso positivo o negativo dell'asse x. (4 punti)

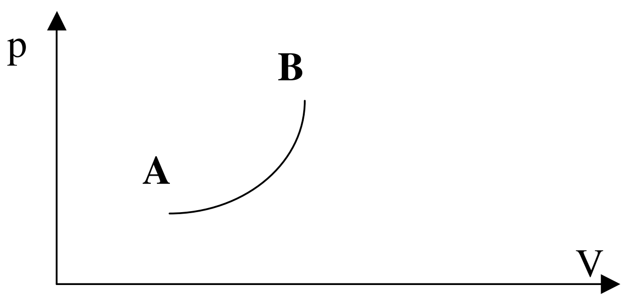
2.2 - Il minimo valore che deve avere il coefficiente di attrito se si vuole che il cilindro non scivoli. (4 punti)



Esercizio 3- L'aria interna al pallone di raggio r = 10 m di una mongolfiera viene riscaldata fino a raggiungere una temperatura media T_i = 120 °C mentre l'aria esterna ha una temperatura T_0 = 10 °C e pressione $p_0 = 10^5$ Pa. La massa totale del pallone e del cesto della mongolfiera è M = 70 kg. Considerando l'aria come un gas perfetto con massa molare m_{mol} = 29 g, si trovi quale è la massima massa m che puo' essere caricata sul cesto se si vuole che la mongolfiera si sollevi. Si facciano i calcoli assumendo che la pressione interna al pallone sia uguale a quella esterna. (5 punti)



Esercizio 4 - Una trasformazione reversibile di una mole di gas biatomico ideale parte dallo stato A con pressione $p_A = 10^5$ Pa e volume V_A = 0.03 m^3 e finisce nello stato B con $p_B = 2p_A$ e $V_B = 2\, V_A$ con la legge $p = a\, V^2 + b$ dove a e b sono coefficienti numerici.



4.1 Si determinino i valori dei coefficienti a e b e le loro unità di misura. (3 punti)

4.2 - Si calcoli il lavoro L fatto dal gas nella trasformazione. (3 punti)

4.3 - Si calcoli il calore Q assorbito dal gas. (3 punti)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1-

1.1- quando il carrello inizia a comprimere la molla essa esercita sul corpo 2 una forza di modulo $K\Delta x$. il corpo si sposterà se tale forza supera la forza massima di attrito. La forza della molla è massima quando è massima la compressione Δx, cioè quando tutta l'energia cinetica del carrello si è trasformata in energia elastica. Dunque :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta x_{\max} = \sqrt{\frac{m}{K}}v \qquad (1)$$

Dunque, il valore di $v_{\max}$ si ottiene imponendo la condizione:

$$K\Delta x_{\max} = \mu_s mg \quad \Longrightarrow \quad v_{\max} = \mu_s \sqrt{\frac{m}{K}}g = 0.346 \text{ m/s} \qquad (2)$$

1.2 - Se v = 1 m/s > vmax, il corpo 2 inizierà a muoversi prima che il carrello si sia fermato quando la forza esercitata dalla molla supererà il valore massimo della forza di attrito. Mentre la molla si schiaccia, il moto del carrello è un moto armonico descritto dalla relazione generale:

$$\Delta x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \varphi\right) \qquad (3)$$

dove A e φ sono coefficienti che si ottengono imponendo le condizioni iniziali $\Delta x(0)=0$ e $v(0)=v$, cioè:

$$A\sin\varphi \quad = \quad 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0 \qquad (4)$$

e

$$A\sqrt{\frac{K}{m}}\cos\varphi = v \quad \Longrightarrow \quad A = \sqrt{\frac{m}{K}}v \qquad (5)$$

dunque

$$\Delta x(t) = \sqrt{\frac{m}{K}}v\sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right) \qquad (6)$$

Il corpo 2 inizia a spostarsi quando $K\Delta x$ supera il valore $\mu_s mg$, cioè al tempo

$$t = \sqrt{\frac{m}{K}}\arcsin\left(\frac{\mu_s}{v}\sqrt{\frac{m}{K}}g\right) = \sqrt{\frac{m}{K}}\arcsin\left(\frac{v_{\max}}{v}\right) = 0.025 \text{ s} \qquad (7)$$

Soluzione Esercizio 2.

2.1-Consideriamo come polo il punto di contatto O fra cilindro e piano. In tal caso i momenti di tutte le forze eccetto quello della coppia τ sono nulli. Dunque, la II Equazione Cardinale si scrive:

$$\tau = I_O\alpha = \frac{3}{2}mar \qquad (1)$$

dove abbiamo sfruttato la condizione di rotolamento $a = \alpha r$. Dunque:

$$a = \frac{2}{3}\frac{\tau}{mr} = 1.11 \text{ m/s}^2 \qquad (2)$$

l'accelerazione è positiva, cioè nel verso positivo dell'asse x.

2.2 - L'unica forza applicata sul cilindro nel verso del moto è la forza di attrito statico Fs. Dunque, la I Equazione Cardinale si scrive:

$$F_s = ma = \frac{2\tau}{3r} \qquad (3)$$

Perchè il corpo non scivoli deve essere $|F_s| < \mu_s mg$, cioè:

$$\frac{2\tau}{3r} < \mu_s mg \quad \Longrightarrow \quad \mu_s > \frac{2\tau}{3mgr} = 0.113 \qquad (4$$

Soluzione esercizio 3.

La legge dei gas perfetti si può scrivere in termini della densità del gas e della massa molare nella forma:

$$p = \rho \frac{RT}{m_{mol}} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{p m_{mol}}{RT} \qquad (1)$$

Poichè il gas interno al pallone e quello esterno hanno la stessa pressione p_0, le densità dei gas interno ed esterno al pallone hanno , rispettivamente, i valori:

$$\rho_i = \frac{p_0 m_{mol}}{RT_i} = 0.888 \text{ Kg/m}^3 \qquad \text{e} \qquad \rho_e = \frac{p_0 m_{mol}}{RT_e} = 1.233 \text{ Kg/m}^3 \qquad (2)$$

Per il principio di Archimede, la forza totale agente sul pallone verso l'alto è:

$$F = (\rho_e - \rho_i) g \frac{4}{3}\pi r^3 - Mg = 13.5\ 10^3 \text{ N} \qquad (3)$$

Dunque, la massima massa che potrà essere caricata sulla mongolfiera è

$$m = \frac{F}{g} = 1.37\ 10^3 \text{ Kg} \qquad (4)$$

Soluzione Esercizio 4 -

4.1- I valori numerici di *a* e *b* si ottengono imponendo che la curva $p(V)$ passi per i punti *A* e *B* nel piano p,V. dunque

$$p_A = aV_A + b \qquad (1)$$

$$2p_A = a4V_A + b$$

risolvendo il sistema si trova:

$$a = \frac{p_A}{3V_A^2} = 3.70\ 10^7 \text{ Pa/m}^6 \qquad (2)$$

$$b = \frac{2p_A}{3} = 0.67\ 10^5 \text{ Pa} \qquad (3)$$

4.2 - Il lavoro fatto dal gas è:

$$L = \int_{V_A}^{2V_A} (aV^2 + b)dV = a\frac{V^3}{3} + bV\Bigg|_{V_A}^{2V_A} = \frac{7}{3}aV_A^3 + bV_A = 4.34\ 10^3 \text{ J} \qquad (4)$$

4.3- Il calore assorbito è dato dal primo Principio della Termodinamica $Q = L + \Delta U$. Ma, per un gas biatomico,

$$\Delta U = \frac{5}{2}R(T_f - T_i) = \frac{5}{2}(p_B V_B - p_A V_A) = \frac{15}{2}p_A V_A = 22.5\ 10^3 \text{ J} \qquad (5)$$

Dunque,

$$Q = L + \Delta U = 26.8\ 10^3 \text{ J} \qquad (6)$$