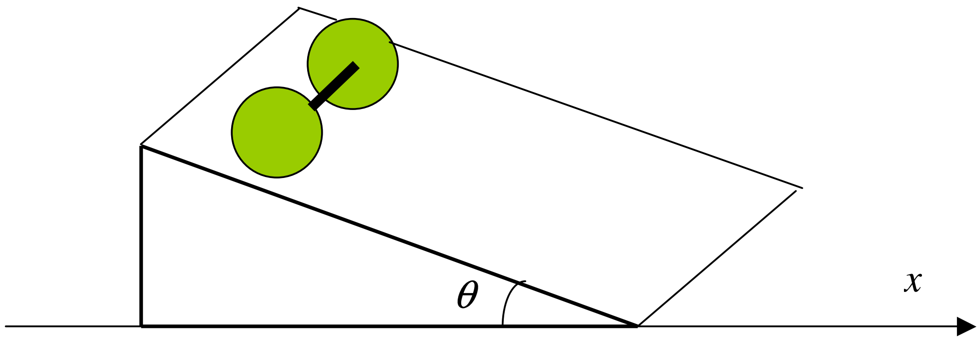
Compito di Fisica Generale I di Ingegneria CIVILE 27 gennaio 2010.

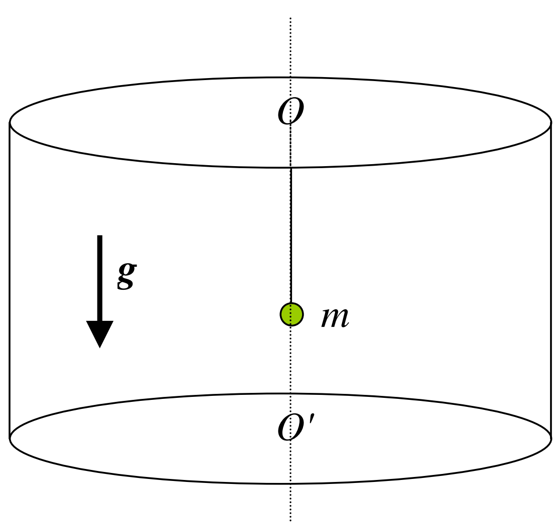
Esercizio 1: Due ruote cilindriche omogenee identiche di massa m = 0.5 kg e raggio R = 10 cm sono saldate ad un asse cilindrico coassiale di massa M = 2kg e raggio r = 2 cm come mostrato schematicamente in figura. Sia le ruote che l'asse sono pieni. Le due ruote sono appoggiate su un cuneo di angolo $\theta = 30$ ° come mostrato schematicamente in figura con i centri di massa alla stessa altezza h = 2.1 m rispetto al piano orizzontale. Le ruote sono inizialmente ferme.



1.1- Nell'ipotesi che il moto delle ruote sia di rotolamento puro, si trovi la velocità raggiunta dalle ruote quando raggiungono il piano orizzontale. (5 punti)

1.2 - Si trovi il minimo valore che deve avere il coefficiente di attrito fra le ruote ed il piano inclinato se si vuole che le ruote non slittino, cioè che il loro moto sia di rotolamento puro. (5 punti)

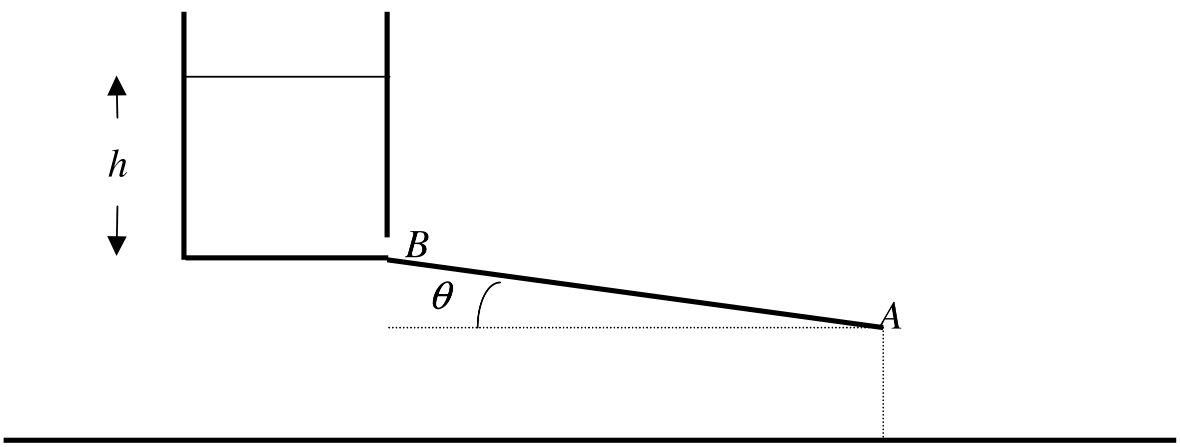
Esercizio 2 - Una giostra ruota con velocità angolare costante attorno ad un asse verticale OO'. Un corpo puntiforme di massa m è collegato ad un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L = 2 m la cui altra estremità è fissata nel punto O sul soffitto della giostra. La giostra ruota compiendo 0.5 giri al secondo



2.1 - Nelle condizioni precedenti, si osserva che in condizioni di equilibrio il pendolo si dispone in modo da formare con la verticale un angolo θ diverso da zero. Si trovi il valore dell'angolo θ (4 punti)

2.2 - Si mostri che, se la velocità angolare della giostra è inferiore ad un valore critico ω_c, il filo in equilibrio resta sempre verticale. Si determini il valore di ω_c. (4 punti)

Esercizio 3- Un grosso serbatoio aperto è riempito di acqua e si trova ad una certa altezza rispetto al terreno. Il livello dell'acqua nel serbatoio si trova ad un'altezza h = 12 m rispetto al punto B sul fondo del serbatoio. Dal serbatoio fuoriescono Q = 10 litri di acqua al secondo che vengono immessi in un canale aperto a sezione quadrata di larghezza L = 5 cm che è inclinato (verso il basso) con un'inclinazione θ = 1° rispetto all'orizzontale e che termina in un punto A come mostrato schematicamente in figura. La lunghezza del canale è d = 286 m. Si consideri il moto dell'acqua come stazionario e si trascuri ogni attrito.



3.1 - Si trovi la velocità v_B con cui l'acqua esce da un foro rettangolare di lato L praticato sul fondo del serbatoio (punto B in figura) in corrispondenza con il canale rettangolare. (4 punti)

3.2 - Si trovi lo spessore s_B dello strato di acqua che scorre nel canale nel punto B. (4 punti)

3.3 - Si trovi la velocità v_A dell'acqua nel punto A alla fine del canale e lo spessore s_A dello strato d'acqua nel punto A. (4 punti)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1- **1.1**- Poichè le forze di attrito statico agenti sulle ruote non fanno lavoro, si conserva l'energia meccanica. Dunque:

$$\frac{1}{2}M_T v^2 + \frac{1}{2}I_T\omega^2 = M_T g(h-R) \qquad (1)$$

Dove $M_T = 2m+M = 3$kg è la massa totale del sistema ruote-asse mentre

$$I_T = \frac{2mR^2 + Mr^2}{2} = 54\ 10^{-4}\ \text{kg m}^2 \qquad (2)$$

è il momento totale di inerzia. Poichè il moto delle ruote è un rotolamento puro, $\omega = v/R$ che, sostituito nella(1) fornisce dopo semplici passaggi algebrici

$$v = \sqrt{\frac{2M_T g(h-R)}{\left(M_T + \frac{I_T}{R^2}\right)}} = 5.76\ \text{m/s} \qquad (3)$$

1.2 - Indichiamo con F_a la forza <u>totale</u> di attrito statico agente sulle ruote nei punti di contatto con il cuneo. Assumiamo come verso della forza quello opposto al verso del moto delle ruote. Inoltre, prendiamo come verso positivo di rotazione quello orario. Con queste scelte, le 2 equazioni cardinali della dinamica del sistema ruote-asse si scrivono:

$$M_T g\sin\theta - F_a = M_T\frac{dv}{dt} = M_T a \qquad (4)$$

$$F_a R = I_T\frac{d\omega}{dt} = \frac{I_T}{R}a \qquad (5)$$

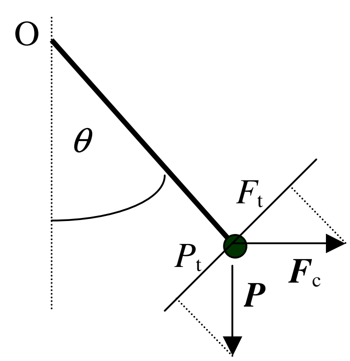
Risolvendo il sistema (4), (5) rispetto alle incognite a e F_a, si trova:

$$a = \frac{M_T g\sin\theta}{M_T + \frac{I_T}{R^2}} \quad , \quad F_a = \frac{I_T M_T g\sin\theta}{R^2\left(M_T + \frac{I_T}{R^2}\right)} \qquad (6)$$

Il minimo valore del coefficiente di attrito statico μ_s è quello per il quale la forza di attrito in eq.(6) è uguale alla massima forza di attrito statico $\mu_s M_T g$, dunque:

$$\mu_s = \frac{I_T\tan\theta}{\left(M_T R^2 + I_T\right)} = 0.088 \qquad (7)$$

Soluzione Esercizio 2.



2.1- Nel sistema ruotante della giostra le forze agenti sono la forza peso ***P***, la tensione della fune ***T*** e la forza apparente centrifuga $\boldsymbol{F}_c$. All'equilibrio, la componente tangenziale della forza peso ($P_t = P\sin\theta$ in figura) deve essere uguale ed opposta alla componente tangenziale della forza centrifuga ($F_t = F_c\cos\theta = m\,\omega^2 L\sin\theta\cos\theta$), cioè:

$$mg\sin\theta = m\omega^2 L\sin\theta\cos\theta \qquad (1)$$

L'eq.(1) ammette due soluzioni distinte:L'eq.(1) ammette due soluzioni distinte:

$$\theta = 0 \quad \text{e} \qquad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L} \Longrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 L}\right) \tag{2}$$

Poichè la giostra fa 0.5 giri al secondo, la sua velocità angolare è $\omega = 3.14$ rad /s. Dunque,

$$\theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 L}\right) = 60.2\,° \tag{3}$$

Le soluzioni $\theta = 0$ e θ dato dalla (3) sono entrambe di equilibrio ma solo la (3) è di equilibrio stabile. Questo si verifica facilmente osservando che la forza risultante agente sul corpo di massa m per qualunque valore di θ diverso dai valori in eq.(2) è sempre diretta in modo da riportare il corpo nella posizione di eq.(3) come richiesto per un equilibrio stabile.

2.2- La soluzione (3) esiste solamente se il termine fra parentesi è inferiore ad 1 (il coseno di un angolo è sempre inferiore ad 1). Dunque, se

$$\frac{g}{\omega^2 L} > 1 \qquad \text{, cioè se} \qquad \omega < \omega_c = \sqrt{\frac{g}{L}} = 2.21 \text{ rad/s} \tag{4}$$

l'unica soluzione di eq.(1) resta $\theta = 0$ che, ora, corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile. Infatti, si verifica facilmente che, se $\omega < \omega_c$, per qualunque valore θ diverso da zero la forza è sempre diretta in modo da riportare il corpo nella posizione verticale. Dunque, ω_c di equazione (4) rappresenta la velocità angolare critica.

Soluzione esercizio 3.

3.1- La velocità in B si ottiene applicando la legge di Torricelli ed è pari a:

$$v_B = \sqrt{2gh} = 15.3 \text{ m/s} \tag{1}$$

3.2 - La sezione rettangolare dell'acqua che scorre all'ingresso del canale è $S_B = Ls_B$, dunque la portata è

$$Q = v_B S_B = v_B L s_B \tag{2}$$

Lo spessore cercato è, percio':

$$s_B = \frac{Q}{v_B L} = 1.31 \text{ cm} \tag{3}$$

3.3 -Poichè il canale è aperto, la pressione dell'acqua in ogni punto è pari alla pressione atmosferica. Ma allora, l'equazione di Bernulli applicata all'acqua nei punti B ed A si scrive:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B \tag{4}$$

$$\Longrightarrow \qquad v_A = \sqrt{v_B^2 + 2g(h_B - h_A)} \tag{5}$$

dove h_B ed h_A sono le altezze dei punti B ed A rispetto a terra. Dalla geometria si deduce:

$$h_B - h_A = d\sin\theta = 4.99 \text{ m} \tag{6}$$

Sostituendo la (6) e la (1) nella (5) si trova:

$$v_A = \sqrt{2g(h + h_B - h_A)} = 18.24 \text{ m/s.}$$

Lo spessore in A è, perciò:

$$s_A = \frac{Q}{Lv_A} = 0.0110 \text{ m} = 1.10 \text{ cm} \tag{7}$$