Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE 21 Luglio 2009

Esercizio 1:

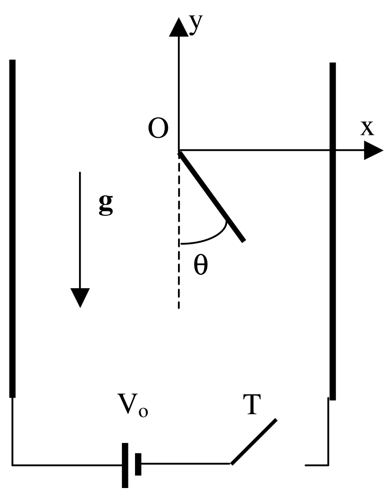
Una piattaforma orizzontale circolare di raggio R = 2 m e massa M = 100 Kg può ruotare senza attrito attorno ad un asse verticale passante per il centro O. Un bambino di massa m = 20 Kg si trova inizialmente fermo sul bordo della piattaforma. La piattaforma ruota inizialmente in senso antiorario con velocità angolare $\omega_0 = 0.5$ rad/s.

1.1- Quale è il modulo della velocità del centro di massa del sistema bambino + piattaforma? (3 punti)

1.2- Quale è il modulo F della forza *orizzontale* che l'asse deve esercitare sulla piattaforma durante il moto di rotazione. (4 punti)

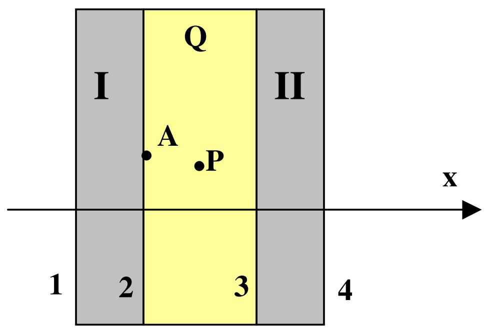
1.3- Ad un dato istante, il bambino inizia a camminare (rispetto alla piattaforma) verso il centro O. Conseguentemente, si osserva che la velocità angolare della piattaforma cambia nel tempo. Si trovi la velocità angolare della piattaforma quando il bambino ha raggiunto la posizione centrale. (4 punti)

Esercizio 2 : Un condensatore piano è costituito da due armature quadrate di superficie S = 2 m^2 poste a distanza d = 2 cm. Una piccola barretta di massa m = 3 g, lunghezza L =0.5 cm è incernierata ad un estremo O al centro del condensatore in presenza del campo di gravità diretto come in figura. Sulla barretta è distribuita una carica elettrica con densità $\lambda = a\, r$ dove r è la distanza da O misurata lungo la barretta ($0 < r < L$) e $a = 10^{-1}$ C/m^2. Le armature sono collegate collegate alla batteria che fornisce una d.d.p. V_o= 200 V.



2.1 - Si trovi l'angolo θ assunto dalla barretta in condizioni di equilibrio. (4 punti)

Esercizio 3:
Due piastre conduttrici I e II di spessore h = 1 cm e superficie S = 1 m^2, sono poste a distanza d =1 mm come mostrato schematicamente in figura. Le due piastre sono elettricamente scariche. Nello spazio compreso fra le piastre è presente un dielettrico (per semplicità si assuma con costante dielettrica pari a quella del vuoto) all'interno del quale si trova distribuita uniformemente una carica elettrica Q = 2 μC.



3.1 - Si trovino i valori delle cariche elettriche indotte sulle superfici 1,2,3 e 4 dei conduttori I e II (3 punti).

3.2- Si trovi la componente x (con il segno) del campo elettrico nel punto P al centro del sistema e nel punto A immediatamente fuori dalla piastra I. (4 punti)

3.3- Un operatore esterno rimuove le piastre portandole a grande distanza dalla carica Q. Si trovi il lavoro fatto dall'operatore (4 punti).

Suggerimento: si sfrutti la simmetria del problema.

Esercizio 4 - Un solenoide ha lunghezza L = 30 cm ed è costituito da N = 800 spire di raggio r =0.5 cm avvolte in modo compatto. La resistenza totale dell'avvolgimento è R = 0.5 Ω. Il solenoide è chiuso in corto circuito. L'asse del solenoide è disposto parallelamente al campo magnetico terrestre B = 0.5 10 $^{-4}$ T. L'asse del solenoide viene posto in rotazione con velocità angolare ω = 100 rad/s attorno ad un asse perpendicolare al campo.
4.1 - Considerando trascurabile l'induttanza del solenoide, si trovi il modulo massimo delle corrente indotta nel solenoide. (4 punti)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1. **1.1**- Il sistema è equivalente a due masse puntiformi M e m poste, rispettivamente nel centro O e il punto P sul bordo della piattaforma dove si trova il bambino. Dunque, il centro di massa si trova in un punto sul segmento OP a distanza d dal centro O pari a:

$$d = \frac{mR + M0}{m+M} = \frac{mR}{m+M} = 0.333 \text{ m} \qquad (1)$$

Il segmento OP ruota in senso antiorario con la velocità angolare ω_0 della piattaforma, dunque, il centro di massa si muove di moto circolare ed uniforme descrivendo una circonferenza di raggio d attorno ad O con velocità:

$$v = \omega_0\, d = 0.167 \text{ m/s} \qquad (2)$$

1.2 - La I equazione Cardinale della dinamica dei sistemi si scrive nella forma:

$$\mathbf{F}_{\text{tot est}} = (M + m)\, \mathbf{a}_{\text{CM}} \qquad (3)$$

dove $\mathbf{F}_{\text{tot est}}$ rappresenta la somma di tutte le forze esterne e $\mathbf{a}_{\text{CM}}$ rappresenta l'accelerazione del centro di massa. Poichè il CM compie un moto circolare ed uniforme, l'accelerazione è quella centripeta ($\omega_0^2 d$) che è diretta radialmente verso il centro nel piano orizzontale. Dunque anche la risultante delle forze esterne è diretta radialmente. Tale forza può essere solo esercitata dall'asse (le altre forze: forza peso e reazione normale) sono parallele all'asse e si equilibrano. Quindi in eq.(3) coincide con la forza orizontale esercitata dall'asse $\boldsymbol{F}$. Dunque, in base alla (3), il modulo di $\boldsymbol{F}$ è pari a

$$F = (m+M)\omega_o^2 d = m\omega_o^2 R = 10 \text{ N} \qquad (4)$$

1.3 - La componente assiale del momento totale delle forze esterne rispetto al centro O è nullo poichè la forza peso e la reazione normale sono dirette lungo l'asse mentre la forza orizzontale esercitata dall'asse di rotazione ha braccio nullo rispetto ad O. Ne consegue che il momento angolare del sistema piattaforma+bambino si deve conservare, cioè:

$$I\omega = \text{costante= valore iniziale} \qquad (5)$$

dove $I = MR^2/2 + mx^2$ è il momento di ineria rispetto all'asse passante per O dove x = distanza del bambino dal centro. All'inizio $x = R$, mentre alla fine $x = 0$. Dunque vale l'uguaglianza:

$$(M+2m)\, \omega_0 R^2/2 = M\omega R^2/2 \qquad (6)$$

da cui si deduce:

$$\omega = \frac{M+2m}{M}\omega_o = 0.7 \text{ rad/s} \qquad (7)$$

Soluzione Esercizio 2

2.1- L'angolo di equilibrio è quello in cui il momento totale delle forze (peso+forza elettrica) è nullo. Il momento di forza è sempre diretto lungo l'asse z uscente dal piano della figura. La componente z del momento di forza rispetto ad O applicato su un elemento di filo di carica dq= λdr e massa dm=mdr/L a distanza r da O è

$$dM_z = rdqE\cos\theta - rdmg\sin\theta = a\frac{V_o}{d}\cos\theta r^2 dr - \frac{m}{L} g\sin\theta r dr \qquad (1)$$

Integrando su tutti gli elementi di barretta con r che varia fra 0 e L si trova:

$$M_z = a\frac{V_o L^3}{3d}\cos\theta - mg\frac{L}{2}\sin\theta \qquad (2)$$

La condizione di equilibrio è $M_z = 0$, dunque:

$$\tan\theta = \frac{2aV_o L^2}{3mgd} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{2aV_o L^2}{3mgd}\right) = 29.5° \qquad (3)$$

Soluzione Esercizio 3 -

3.1 Per la simmetria del sistema, le cariche elettriche che si inducono sulle superfici interne 2 e 3 dei conduttori I e II devono essere uguali. indichiamo con q il valore comune delle cariche q_2 e q_3 sulle due superfici. Poichè i conduttori sono elettricamente scarichi, le cariche che si addensano sulle superfici esterne sono $q_1 = q_4 = - q$. Per trovare il valore di q, applichiamo il teorema di Gauss ad una superficie chiusa con due superfici piane contenute interamente nei due conduttori. All'equilibrio, il flusso del campo uscente da tale superficie chiusa è zero e, quindi, la carica interna $q+q+Q$ deve essere nulla. Dunque:

$$q_2 = q_3 = q = -\frac{Q}{2} = -1\ \mu C \qquad e \qquad q_1 = q_4 = -q = \frac{Q}{2} = 1\ \mu C \tag{1}$$

3.2 - Data la simmetria piana del problema, il campo in ogni punto deve essere diretto lungo l'asse x perpendicolare alle piastre. D'altra parte, il piano parallelo alle piastre che passa per P è un piano di simmetria per il sistema e, quindi, il campo in P deve giacere in tale piano. Ma allora, possiamo concludere che $\boldsymbol{E}(P)=0$. Si arriva alla stessa conclusione che , per ogni carica a destra di P ce n'è una simmetrica a sinistra che genera un campo opposto.
Il campo in A si ottiene utilizzando il teorema di Coulomb

$$E_x(A) = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = -\frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = 1.13\ 10^5\ \text{V/m} \tag{2}$$

3.3 - Quando le armature vengono allontanate, il campo elettrico in tutte le regioni di spazio resta inalterato tranne che nella regione interna alle piastre dove il campo era zero e diventa uguale in modulo a $E = Q/(2\ \varepsilon_o\ S)$. Dunque, in tali regioni la densita' di energia del campo che era inizialmente nulla diventa pari a $u = \varepsilon_o E^2/2$. Poichè il volume totale occupato dalle 2 piastre è $V= 2\ Sh$, la variazione di energia elettrostatica è:

$$\Delta U = \frac{Q^2 h}{4\varepsilon_0 S} \tag{3}$$

Il lavoro fatto dall'operatore è, percio',

$L = \Delta U = 1.13$ mJ

Soluzione esercizio 4 -
Il flusso del campo magnetico che attraversa il solenoide è

$$\Phi(t) = BN\pi r^2 \cos\omega t = 3.14\ 10^{-6} \cos(\omega t)\ \text{Wb} \tag{1}$$

Conseguentemente, la fem che si genera è

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\omega BN\pi r^2 \sin\omega t = -3.14\ 10^{-4} \sin(\omega t)\ \text{V} \tag{2}$$

e la corrente indotta è

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\omega BN\pi r^2}{R} \sin\omega t = -6.28\ 10^{-4} \sin(\omega t)\ \text{A} \tag{3}$$

Il massimo modulo della corrente è $i_{max} = 0.628$ mA