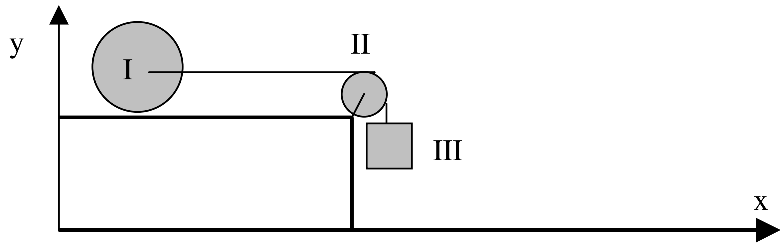
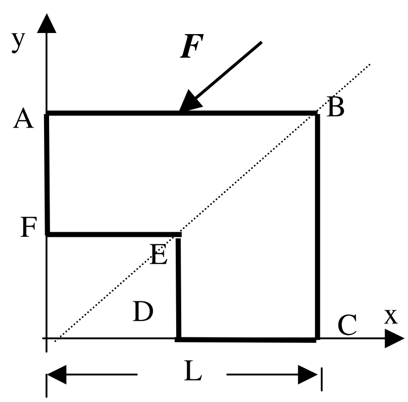
**Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE** 30 giugno 2009.

**Esercizio 1**:Un sistema è costituito da due corpi (I e III) e una carrucola (II) di masse $m_I$ = 1Kg, $m_{II}$ = 2 Kg e $m_{III}$ =1 kg disposte come mostrato in figura in presenza del campo di gravità terrestre. La massa I ha forma cilindrica di raggio $R_I$ = 10 cm e la carrucola ha raggio $R_{II}$ =5 cm ed è libera di ruotare senza attrito atorno al suo asse. Ad un dato istante, la massa III viene lasciata libera. La fune che collega le masse è di massa trascurabile ed inestensibile. Il corpo III si trova inizialmente ad altezza $h$ = 2 m da terra.



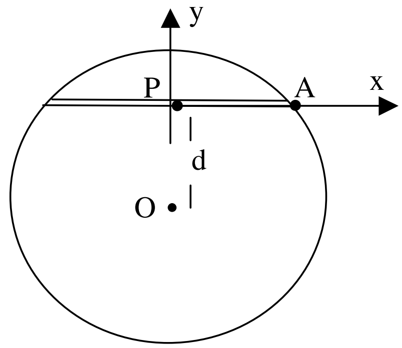

**1.1**- Si trovi la velocità con cui la massa III arriva a terra nell'ipotesi che il moto della massa I sia un rotolamento puro. (3 punti).
**1.2** - Si trovi l'accelerazione del corpo III ad ogni istante durante la caduta. (4 punti)
**1.3**- Si trovi il minimo valore che deve avere il coefficiente di attrito statico $\mu$ del piano su cui è appoggiata la massa I se si vuole che il moto sia di rotolamento puro. (3 punti)

**Esercizio 2** - Ad una piastra **quadrata** di spessore $d$ = 1 cm, lato $L$ = 1 m e densità uniforme $\rho$ = 2000 Kg/m$^3$ viene tolto un bordo **quadrato** di lato $L_1$ = $L$/2 = 0.5 m come mostrato schematicamente in figura.




**2.1** - Si trovi la coordinata $x$ del centro di massa. ( 4 punti)
**2.2** - Se si applica una forza ***F*** di 5 N in un punto al centro del lato $AB$ diretta parallelamente all'asse diagonale $EB$, si trovi il valore della componente $z$ ( con il corretto segno!) del momento di forza rispetto al centro di massa della piastra ( $z$ è **l'asse uscente** dalla figura). (3 punti)

**Esercizio 3**- Una sfera isolante di raggio $a$ = 3 cm è caricata uniformemente con una carica elettrica $Q$ = 1 μC. Nella sfera viene praticato un piccolo tunnel cilindrico a distanza $d$ = 2 cm dal centro $O$. Una carica elettrica puntiforme negativa $q$ = - 2 μC, di massa $m$ = 5 mg, viene posta ferma nel punto $A$ ad una estremità del foro ed è lasciata libera di scivolare senza attrito all'interno del tunnel. Supponendo che il diametro del tunnel sia sufficientemente piccolo da non perturbare il campo prodotto da $Q$ e assumendo, per semplicità, che la costante dielettrica della sfera sia quella del vuoto ( $\varepsilon_o = 8.854 \quad 10^{-12}$ F/m)




**3.1** - Si calcoli la velocità $v$ raggiunta dalla carica $q$ quando arriva nel punto $P$ al centro del tunnel cilindrico. (4 punti)
**3.2** - Si mostri che il moto della carica è un moto armonico e si calcoli il tempo necessario perchè la carica $q$ arrivi nel punto $P$ partendo da $A$. ( 4 punti)

**Esercizio 4** - Una bobina di induttanza $L$ = 2 μH e resistenza $R$ = 3 Ω, è costituita da $N$ = 1000 spire raggio $a$ = 1 cm e si trova in una regione di spazio dove il campo magnetico è nullo. Ad un dato istante $t$ = 0, la spira viene introdotta in un tempo trascurabile in una regione di spazio dove è presente un campo magnetico $B = 3 \; 10^{-4}$ T la cui orientazione fa un angolo $\theta$ = 60 ° con l'asse della bobina.

**4.1** - Si trovi la corrente $i$ che fluisce nella bobina subito dopo l'inserimento ( 3 punti)

**4.2** - Si trovi il modulo della carica elettrica complessiva che fluisce nella bobina durante l'intero processo (2 punti)

**ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE**.

**c**

**Soluzione Esercizio 1**- **1.1**- Nel rotolamento puro non c'è dissipazione di energia e, dunque, si conserva l'energia meccanica. I corpi I e II restano sempre alla stessa altezza rispetto al suolo e, perciò, la loro energia potenziale gravitazionale resta costante e puo' essere trascurata. L'energia iniziale del sistema è solo pari all'energia gravitazionale della massa III: $E_i = m_{III}gh$ (1)

Quando la massa arriva a terra ( immediatamente prima), l'energia è solamente cinetica e pari alla somma delle energie cinetiche dei tre corpi.

$$E_f = \frac{1}{2}m_I v^2 + \frac{1}{2}\frac{m_I R_I^2}{2}\omega_I^2 + \frac{1}{2}\frac{m_{II} R_{II}^2}{2}\omega_{II}^2 + \frac{1}{2}m_{III}v^2 \qquad (2)$$

dove $\omega_I = v/R_I$ e $\omega_{II} = v/R_{II}$. Sostituendo questi valori nella (2) si trova

$$E_f = \frac{1}{4}(3m_I + m_{II} + 2m_{III})v^2 \qquad (3)$$

Imponendo l'uguaglianza delle energie ($E_i = E_f$) si trova: $v = \sqrt{\dfrac{4m_{III}gh}{(3m_I + m_{II} + 2m_{III})}}$ = 3.35 m/s

**1.2** - Le equazioni del moto per il corpo I sono:

$$T_1 + F_s = m_I \dot{v} \qquad (4)$$

dove $\dot{v}$ è l'accelerazione del corpo III e l'equazione dei momenti

$$F_s R_I = -\frac{m_I R_I^2}{2}\dot{\omega} = -\frac{m_I R_I}{2}\dot{v} \quad \Longrightarrow \quad F_s = -\frac{m_I}{2}\dot{v} \qquad (5)$$

dove $T_1$ è la tensione nel tratto di corda che collega *I* e *II* e $F_s$ è la componente *x* della forza di attrito statico agente su *I*.

Sostituendo la (5) nella (4) si trova: $T_1 = \frac{3}{2}m_I\dot{v}$ (6)

L'equazione del moto della carrucola è:

$$(T_2 - T_1)R_{II} = m_{II}\frac{R_{II}^2}{2}\dot{\omega}_{II} = \frac{m_{II}R_{II}}{2}\dot{v} \quad \Longrightarrow \quad T_2 - T_1 = \frac{m_{II}}{2}\dot{v} \qquad (7)$$

dove $T_2$ è la tensione del trato di fune che collega il corpo II con III. Dalla(7) e (6) si deduce:

$$T_2 = \left(\frac{3}{2}m_I + \frac{m_{II}}{2}\right)\dot{v} \qquad (8)$$

Infine, l'equazione del moto del corpo III è:

$$m_{III}g - T_2 = m_{III}\dot{v} \quad \Longrightarrow \quad \dot{v} = \frac{m_{III}g}{\left(\frac{3}{2}m_I + \frac{1}{2}m_{II} + m_{III}\right)} = 2.8 \text{ m/s}^2 \qquad (9)$$

**1.3**-Sostituendo l'accelerazione in (9) nella (5) si trova che la forza di attrito statico necessaria per mantenere il corpo in rotolamento è $F_s = -\dfrac{m_I m_{III} g}{(3m_I + m_{II} + 2m_{III})}$ (10)

dove il segno - indica che la forza è diretta in verso opposto all'asse *x*. La forza di attrito in modulo deve essere inferiore a $\mu m_I$g, dunque il corpo I può rotolare solamente se $\mu = \dfrac{m_{III}}{(3m_I + m_{II} + 2m_{III})}$ = 1/7 = 0.143

**Soluzione Esercizio 2**. **2.1**- Una piastra quadrata piena di lato *L* può essere pensata come la sovrapposizione della piastra dell'esercizio ( con il taglio quadrato) di massa *M* e una piastra quadrata di lato $L_1$ e massa $M_1$. Indicando con $x_p$ la coordinata *x* del centro di massa della piastra piena e con $M_p = M_1 + M$ la sua massa, con $x_1$ la coordinata *x* del CM della piastra di lato $L_1$ e con *x* quella della piastra con il taglio quadrato, si scrive: $x_p = \dfrac{M_1x_1 + Mx}{M + M_1}$ (1)

dove $M_1 = \rho\, d\, L_1^2$ e $M = \rho\, d(L^2 - L_1^2)$ da cui si deduce: $x = \dfrac{L^2 x_p - L_1^2 x_1}{2(L^2 - L_1^2)}$ (2)

Ora, per simmetria, $x_p = L/2$ e $x_1 = L_1/2$, dunque la (2) diventa: $x = \dfrac{L^3 - L_1^3}{L^2 - L_1^2} = 0.583$ m (3)

**2.2**- Per simmetria, il centro di massa si trova sull'asse *EB*, che è un asse di simmetria. La forza è diretta parallelamente a tale asse e, quindi, il momento di forza rispetto al centro di massa è pari in modulo al prodotto del modulo della forza per la distanza del punto di applicazione dall'asse ( braccio della forza *b*). Dalla figura si deduce immediatamente $b = \dfrac{L}{2\sqrt{2}} =$ 0.354 m. Ne consegue che il modulo del momento di forza è $\Gamma = \dfrac{FL}{2\sqrt{2}} =$ 1.77 N m (4)

Dalla regola della mano destra si deduce che il momento di forza è diretto lungo l'asse z nel verso positivo, quindi, la componente *z* è: $\Gamma_z = \Gamma =$ + 1.77 N m. (5)

**Soluzione esercizio 3**. **3.1**- Poichè il campo elettrico è conservativo, non ci sono attriti e la reazione vincolare sulla carica non compie lavoro, l'energia meccanica si conserva. La velocità raggiunta dalla carica si ottiene imponendo la conservazione dell'energia: $v = \sqrt{\dfrac{2q[V(A) - V(P)]}{m}}$ (1)

dove $V(A)$ e $V(P)$ è il potenziale elettrostatico generato dalla carica $Q$ in $A$ e $P$. Per calcolare il potenziale, calcoliamo prima il campo applicando il Teorema di Gauss ad una superficie sferica di raggio $r$ centrata in $O$. Si distinguono i due casi:

$$r < a \qquad \boldsymbol{E}_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a^3}\boldsymbol{r} \qquad (2)$$

$$r > a \qquad \boldsymbol{E}_e = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^3}\boldsymbol{r} \qquad (3)$$

Il potenziale in un qualunque punto all'interno della sfera ( $r < a$) è, perciò:

$$V(r) = \int_r^a E_i dr + \int_a^\infty E_e dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a^3}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a} \qquad (4)$$

Sostituendo i valori $V(A) = V(a)$ e $V(P)= V(d)$ in eq.(1), si trova

$$v = \sqrt{\frac{2q[V(A) - V(P)]}{m}} = \sqrt{\frac{qQ(d^2 - a^2)}{4\pi\varepsilon_o a^3 m}} = 258 \text{ m/s} \qquad (5)$$

**3.2**- Il campo elettrico in eq.(2) esercita una forza radiale $\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{E}_i$ sulla carica $Q$. Poichè la carica è vincolata a muoversi lungo l'asse $x$ parallelo al tunnel cilindrico, calcoliamo la componente $x$ della forza che risulta ( vedi eq.(2)):

$$F_x = qE_x = qE_i \sin\theta = \frac{qQr}{4\pi\varepsilon_o a^3}\frac{x}{r} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o a^3}x \qquad (6)$$

La (6) è analoga alla forza di una molla con costante elastica $K = -\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_o a^3}$ = 666 N/m (7)

e lunghezza a riposo $l = 0$. Conseguentemente, la carica puntiforme oscilla armonicamente attorno al punto $P$ dove arriva dopo un quarto di periodo di oscillazione. Dunque il tempo cercato è:

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}} = 1.36\ 10^{-4} \text{ s} \qquad (8)$$

**Soluzione Es.4 - 4.1**- Il flusso totale del campo magnetico attraverso la bobina è pari a

$$\Phi_{tot} = \Phi_{ext} + Li \qquad (1)$$

dove $\Phi_{\text{ext}}$ è il flusso del campo esterno e $Li$ è il flusso indotto. Per la legge di Faraday, la variazione di flusso totale in un intervallo di tempo infinitesimo $\Delta t$ è

$$\Delta\Phi_{tot} = -Ri\Delta t \approx 0 \qquad (2)$$

dunque, il flusso totale del campo magnetico non cambia nel breve intervallo di tempo in cui si inserisce la bobina. Ma iniziamente il flusso totale era nullo perchè la bobina non era immersa nel campo e la corrente in essa era nulla. Di conseguenza, subito dopo l'inserimento il flusso totale deve essere nullo, cioè:

$$\Phi_{tot} = BN\pi a^2 \cos\theta + Li = 0 \quad \Longrightarrow \quad i = -\frac{BN\pi a^2 \cos\theta}{L} = 23.6 \text{ A} \qquad (3)$$

**4.2** - Per la legge di Felici, la carica totale che attraversa la spira è

$$\Delta Q = \int_0^\infty i(t)dt = -\int_0^\infty \frac{1}{R}\frac{d\Phi_{tot}}{dt}dt = \frac{\Phi_{tot}(0) - \Phi_{tot}(\infty)}{R} = -\frac{BN\pi a^2 \cos\theta}{R} = -15.7\ \mu\text{C} \qquad (4)$$