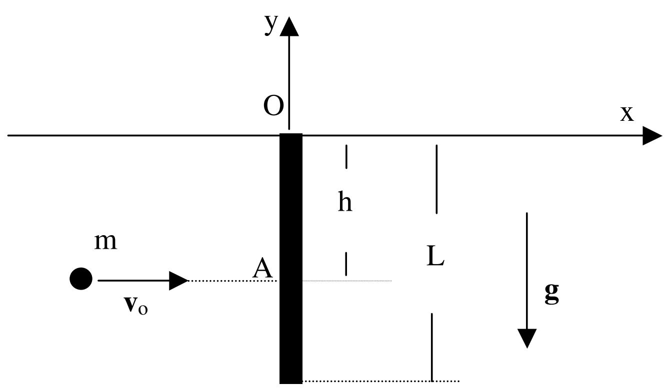
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE 2009 12 Giugno 2009

Esercizio 1: Un asse è disposto orizzontalmente e passante per il punto O in figura. L'asse è perpendicolare al piano della figura. Una barretta di massa m = 200 g e lunghezza L = 30 cm è libera di ruotare attorno all'asse passante per un estremo della barretta in presenza del campo di gravità diretto come in figura. Un proiettile di massa m viene sparato con velocità di modulo v_o = 1 m/s lungo l'asse x e urta contro la barretta nel punto A a distanza h = 10 cm dall'estremo O della barretta. Dopo l'urto il proiettile rimane conficcato nella barretta.



1.1 - Si calcoli la velocità angolare ω della barretta dopo l'urto. (punteggio: 3)

1.2 - Si trovi la distanza del centro di massa del sistema barretta+proiettile dal punto O dopo l'urto. (punteggio 3)

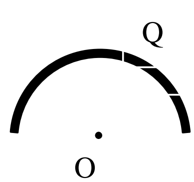
1.3 - Si trovi quale è il massimo angolo di rotazione θ_m della barretta rispetto alla posizione iniziale nel moto successivo all'urto(punteggio 4)

1.4 - Si trovi l'impulso della forza (componente x e componente y)esercitata dalla barretta sull'asse passante per O durante l'urto. (punteggio 4)

Esercizio 2 Una carica elettrica Q = 1 μC è distribuita uniformemente su un filo semicircolare di raggio R = 5 cm. Una carica puntiforme Q di massa m = 1 mg si trova nel punto O al centro del semicerchio.

2.1 - Si calcoli direzione, verso e modulo della forza agente sulla carica puntiforme (punteggio 4)

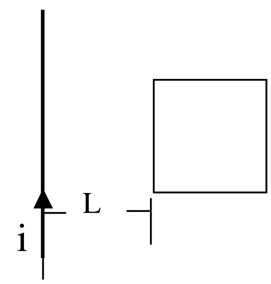
2.2 - Sotto l'effetto delle forze elettriche, la carica puntiforme si allontana rapidamente dalla spira. Si tovi la velocità massima da essa raggiunta.(punteggio 4)



Esercizio 3 - Una spira quadrata di lato L = 10 cm, resistenza elettrica R = 2 Ω e induttanza trascurabile si trova a distanza L da un lungo filo conduttore rettilineo. Il filo è attraversato da una corrente che oscilla nel tempo secondo la legge $i = i_o \cos(\omega t)$ con i_o = 5 A e ω = 1 rad/s.

3.1- Si trovi la corrente elettrica I che scorre nella spira assumendo come verso positivo della corrente nella spira quello orario. (punteggio 4)

3.2 Si trovi il massimo valore del modulo F della forza esercitata dal filo sulla spira. (punteggio 4)



ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1.

1.1- Durante l'urto si conserva il momento di quantità di moto del sistema costituito dal corpo di massa m e dalla barretta rispetto all'asse passante per *O* (l'unica forza impulsiva agente sul sistema è la forza esercitata dall'asse che ha momento nullo rispetto ad *O*).

$$mv_o h = mvh + I_O \omega \qquad (1)$$

dove v = velocità corpo, ω = velocità angolare barretta e $I_O = mL^2/3$ = momento di inerzia della barretta rispetto ad O. Ricordando che $v = \omega h$, dalla (1) si deduce:

$$\omega = \frac{v_o h}{h^2 + \frac{L^2}{3}} = 2.50 \text{ rad/s} \qquad (2)$$

1.2- La barretta è equivalente ad un corpo puntiforme di massa m posto a distanza $L/2$ da O. Dunque, la distanza d_{CM} del centro di massa da O è:

$$d_{CM} = \frac{m\frac{L}{2} + mh}{2m} = \frac{\frac{L}{2} + h}{2} = 0.125 \text{ m} \qquad (3)$$

1.3- Non essendoci attriti, dopo l'urto si conserva l'energia meccanica del sistema. All'istante iniziale (subito dopo l'urto), se prendiamo O come punto di energia gravitazionale nulla, l'energia meccanica è:

$$E_i = -2mgd_{CM} + \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (4)$$

dove ω è la velocità angolare calcolata in (2) e I è il momento di inerzia del sistema barretta+proiettile rispetto all'asse passante per O:

$$I = mh^2 + m\frac{L^2}{3} = 8.00\ 10^{-3} \text{ kg m}^2 \qquad (5)$$

Se la barretta si ferma durante il moto successivo all'urto, allora nel punto in cui si ferma individuato dall'angolo θ_m, la sua energia è solamente potenziale e pari a:

$$E_f = -2mgd_{CM} \cos\theta_m \qquad (6)$$

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica ($E_i = E_f$),si trova:

$$\cos\theta_m = 1 - \frac{I\omega^2}{4mgd_{CM}} \qquad (7)$$

La (7) ammette soluzione solamente se cos $\theta_m > -1$ (il coseno è sempre compreso fra-1 e 1). Dunque, la barretta si fermerà solamente se $I\omega^2 < 4mgd_{CM}$. Se questa condizione è verificata, la barretta si ferma all'angolo:

$$\theta_m = \arccos\left(1 - \frac{I\omega^2}{4mgd_{CM}}\right) = 18° \qquad (8)$$

1.4- L'unica forza impulsiva esterna agente sul sistema barretta+proiettile può essere esercitata solamente dall'asse passante per *O*. Dunque, l'impulso di tale forza è pari alla variazione della quantità di moto del sistema durante l'urto ($\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i$ dove $\boldsymbol{p}_f$ = quantità di moto finale e $\boldsymbol{p}_i$ =quantità di moto iniziale). Per il *principio di azione e reazione*, l'impulso $\boldsymbol{I}$ esercitato dalla barretta sull'asse è uguale ed opposto al precedente cioè:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_f \qquad (9)$$

dove

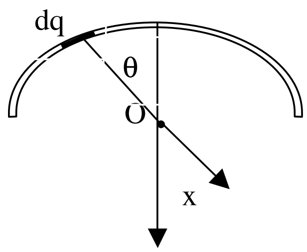
$$\boldsymbol{p}_i = (mv_o, 0) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{p}_f = 2m\boldsymbol{v}_{CM} = (2md_{CM}\omega, 0) \qquad (10)$$

dove $\boldsymbol{v}_{CM}$ = velocità del centro di massa del sistema barretta+proiettile subito dopo l'urto e d_{CM} e ω sono calcolati in (3) e (2), rispettivamente. L'impulso cercato è, perciò:

$\boldsymbol{I} = (mv_o - 2md_{CM}\,\omega, 0) = (0.075 \text{ N}, 0 \text{ N})$ (11)

Soluzione Esercizio 2 :

2.1- La forza è pari a $Q\boldsymbol{E}$, dove $\boldsymbol{E}$ è il campo elettrico nel punto O.



Per motivi di simmetria il campo è diretto lungo l'asse x in figura nel verso positivo e la componente x del campo è pari a:

$$E = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\cos\theta d\theta = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2} = 2.29\ 10^6 \text{ V/m} \qquad (1)$$

dunque, la forza e' anche essa diretta lungo l'asse x e pari a $F = QE = 2.29$ N. (2)

2.2 - Inizialmente la carica ha solo energia potenziale $U = Q\ V(\text{O})$ e, man mano che si allontana, acquista energia cinetica. La massima energia cinetica e, quindi, velocità viene raggiunta quando la carica si trova a distanza infinita dove il potenziale e' nullo. Imponendo la conservazione della carica si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{2QV(O)}{m}} \qquad (3)$$

dove

$$V(O) = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int dq = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0.18\ 10^6 \text{ V} \qquad (4)$$

sostituendo V(O) nella (3) si trova

$v = 19.0$ m/s

Soluzione Esercizio 3.

3.1 -Il campo magnetico $\boldsymbol{B}$ prodotto dal filo nella spira è perpendicolare al piano della figura ed è entrante quando la corrente i fluisce nel verso indicato in figura ($i > 0$) e uscente nel caso opposto. Prendendo come asse z l'asse parallelo al campo ed entrante nel piano di figura, si scrive:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} \qquad (1)$$

Il flusso del campo attraverso la spira ed entrante nel piano di figura è

$$\Phi = \int B_z dS = \int_L^{2L} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} L dr = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{iL}{1}\ln 2 \qquad (2)$$

Poichè i varia nel tempo, anche Φ varia e, quindi si crea una forza elettromotrice ε = -(1/R) dΦ/dt=RI, dove I è la corrente che fluisce nella spira in verso orario. Dunque:

$$I = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 L}{2\pi R}\ln(2)\frac{di}{dt} = \frac{\mu_0 L}{2\pi R}\ln(2) i_0 \sin(t) = 3.46\ 10^{-8}\ \sin(\mathrm{t})\ \ \mathrm{Wb} \qquad (3)$$

3.2- La corrente I interagisce con il campo magnetico e si crea una forza (forza di Laplace). Per motivi di simmetria, la forza risultante è diretta lungo l'asse x nel piano della figura e perpendicolare al filo rettilineo. Scegliendo per l'asse x come verso positivo quello uscente dal filo, la componente x della forza risulta pari a

$$F_x = -IL\left[B_z(L) - B_z(2L)\right] = -\frac{\mu_0 i I L}{4\pi} = \frac{\mu_0^2 L}{8\pi^2 R} i_0^2 \ln(2)\sin(t)\cos(t) = \frac{\mu_0^2 L}{16\pi^2 R} i_0^2 \ln(2)\sin(2t) \qquad (4)$$

la forza oscilla nel tempo e raggiunge il modulo massimo ogni volta che $|\sin(2t)| = 1$. Dunque, il modulo massimo è:

$$F_x^{\max} = \frac{\mu_0^2 L}{16\pi^2 R} i_0^2 \ln(2) = 8.66\ 10^{-15}\ \mathrm{N} \qquad (5)$$