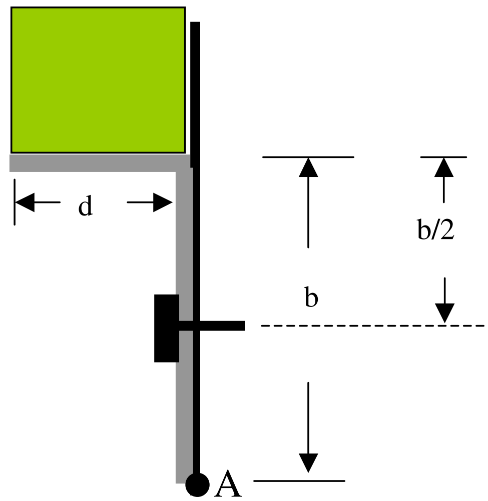
COMPITO FISICA GENERALE INGEGNERIA CIVILE 15 Settembre 2009

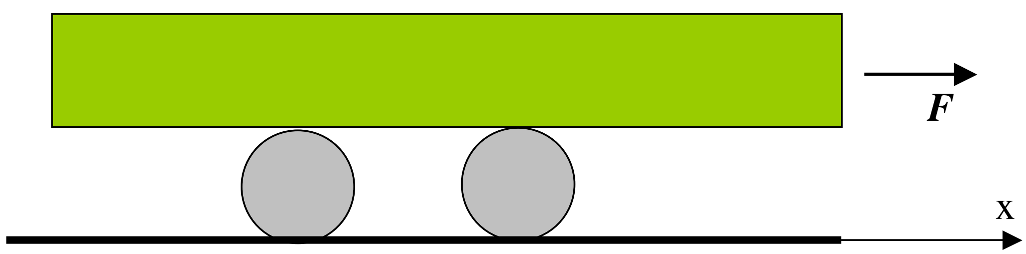
Esercizio 1 - Una mensola ad L rigida e di massa trascurabile ha due lati di lunghezze d =10 cm e b = 20 cm. La mensola è fissata con un'unica vite su una parete verticale liscia. La vite si trova al centro del lato lungo della mensola, come mostrato schematicamente in figura. La vite è leggermente svitata. Sulla mensola è appoggiato un cubo di massa M = 30 kg e lato di lunghezza d.



1- Si trovi il valore della componente x della forza esercitata dalla vite in condizioni di equilibrio.

2 - Si calcoli la reazione normale R esercitata dal piano verticale sulla mensola.

Esercizio 2 - Per spostare una barca di massa M = 500 kg si pone la barca su due cilindri identici di massa m = 10 kg e raggio R = 10 cm e si applica sulla barca una forza diretta lungo un asse orizzontale x nel verso positivo e di modulo F = 100 N. Si supponga che i cilindri rotolino sul pavimento orizzontale e che la barca non scivoli sui cilindri.

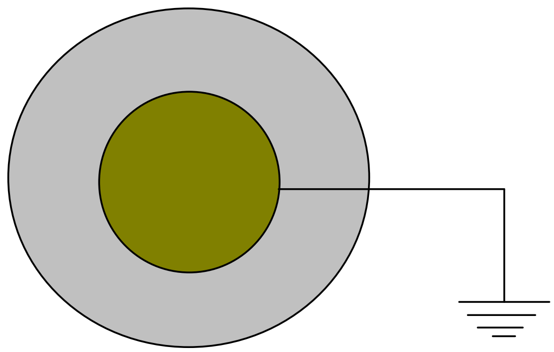


1 - Quale è il rapporto fra la velocità con cui si sposta la barca e la velocità dei centri di massa dei cilindri ?

2 - Quale è l'accelerazione della barca ?

3 - Si supponga ora che il centro di massa della barca si trovi a coincidere verticalmente con quello di uno dei due cilindri. Quali sono i valori delle reazioni normali R_1 e R_2 esercitate dai cilindri sulla barca in queste condizioni?

Esercizio 3 - Una sfera conduttrice di raggio a = 10 cm si trova all'interno di una sfera cava isolante cava concentrica alla prima e di raggio interno a e raggio esterno $b = 2a$. La sfera isolante è caricata uniformemente con una carica elettrica Q = 1 μC. La sfera conduttrice è posta a massa. Facendo l'ipotesi semplificatrice che gli effetti dielettrici dell'isolante siano trascurabili e che, cioè, la costante dielettrica dell'isolante sia la stessa del vuoto $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ F/m, si calcoli:



1 - la carica elettrica Q_1 indotta sulla superficie della sfera conduttrice.

2- Il lavoro (con il segno corretto) che deve essere fatto da un operatore per portare una carica pari a Q sulla superficie esterna ($r = b$) della sfera isolante a partire da una distanza infinita.

ATTENZIONE: Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate indicando i passaggi essenziali necessari per raggiungere la soluzione cercata e definendo tutti i nuovi simboli che vengono introdotti. Risposte anche corrette date senza opportuna giustificazione non verranno prese in considerazione.

Soluzione Es.1 - **1.1** - Perchè il sistema costituito dalla mensola e dal cubo stia in equilibrio, si devono annullare le risultanti delle forze esterne e dei momenti di forza esterna. Le forze esterne sono : la forza peso ***Mg*** agente sul cubo, la forza ***F*** esercitata dalla vite e la reazione normale ***R*** esercitata dalla parete liscia sullla mensola nel punto di contatto (poichè la vite è leggermente allentata, il punto di contatto con la parete è il punto *A* all'estremo inferiore della mensola). La somma dei momenti di forza applicati rispetto al punto *A* è

$$F_x\, b/2 - Mgd/2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F_x = \frac{Mgd}{b} = \frac{Mg}{2} = 147 \text{ N} \qquad (1)$$

dove F_x è la componente *x* della forza esercitata dalla vite sulla mensola.

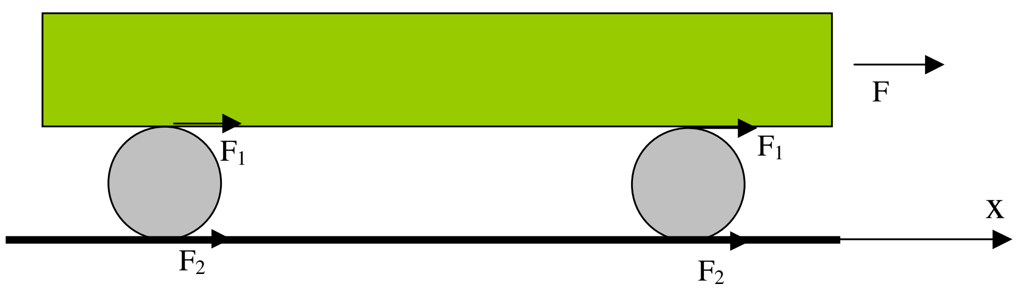
1.2 - Le uniche forze orizzontali agenti sul sistema sono la reazione del piano vericale in *A* e la forza F_x della vite. Poichè il sistema deve essere in equilibrio, la somma di queste forze si deve annullare. Dunque, la reazione normale è pari a

$$R = F_x = 147 \text{ N} \qquad (2)$$

Soluzione Es.2 . 2.1 - Poichè i cilindri rotolano, la velocità del punto *A* dei cilindri in contatto con la barca è $v_A = \omega\, 2R$, mentre quella del centro di massa dei cilindri è $v_{CM} = \omega R$. D'altra parte, la barca non scivola sui cilindri. Dunque la velocità della barca è $v = v_A$. Ma allora:

$$\frac{v}{v_{CM}} = \frac{\omega 2R}{\omega R} = 2 \qquad (1)$$

2.2 -



Indichiamo con F_1 e F_2, rispettivamente, le componenti *x* delle forze esercitate sui cilindri dalla barca e dal pavimento. L'equazioni del moto di ciascun cilindro sono

$$R(F_1 - F_2) = I\alpha = \frac{mR^2}{2}\alpha = \frac{mR}{2}a_{CM} \qquad \Longrightarrow \qquad F_1 - F_2 = \frac{m}{2}a_{CM} \qquad (2)$$

$$F_1 + F_2 = ma_{CM} \qquad (3)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che, per un moto di rotolamento, l'accelerazione del centro di massa a_{CM} è legata all'accelerazione angolare α dalla relazione $a_{CM} = \alpha R$. Le relazioni (2) e (3) possono essere scritte in termini dell'accelerazione *a* della barca tensendo conto che, per la (1), $a = 2\, a_{CM}$.

$$F_1 - F_2 = \frac{m}{4}a \qquad (4)$$

$$F_1 + F_2 = \frac{m}{2}a \qquad (5)$$

Le equazioni (4) e (5) hanno tre incognite (a , F_1 , F_2), dunque è necessaria un'ulteriore equazione che è la legge di Newton per il moto della barca lungo l'asse *x*. Poichè abbiamo indicato con F_1 la componente *x* della forza che la barca esercita su un cilindro, la forza che ciascun cilindro esercita sulla barca è pari a - F_1. Dunque, l'quazione di Newton per la barca è:

$$F - 2F_1 = Ma \qquad (6)$$

Risolvendo il sistema di equazioni 4-7, si ottiene:

$$a = \frac{F}{M + \frac{3m}{4}} = 0.197 \text{ m/s}^2 \qquad (7)$$

2.3 - Poichè la barca non si sposta verticalmente, la somma delle forze verticali agenti sulla barca si deve annullare. Dunque

$$R_1 + R_2 - Mg = 0 \qquad (8)$$

dove R_1 e R_2 sono le reazioni normali esercitate dai cilindri nei punti di contato con la barca. D'altra parte la barca non ruota, dunque si deve annullare anche il momento di forza totale e, in particolare, la sua componente lungo l'asse orizzontale y. Prendendo come punto di applicazione dei momenti il centro di massa della barca, si osserva che i momenti dovuti alla forza peso $\boldsymbol{Mg}$ e alla reazione R_1 del cilindro che si trova in corrispondenza con il centro di massa sono entrambi nulli. Dunque il momento totale lungo y si riduce a

$$M_{tot} = R_2 L = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad R_2 = 0 \qquad (9)$$

dove L indica la distanza fra i centri di massa dei cilindri. Sostituendo la (9) nella (8) si ottiene

$$R_1 = Mg = 4900 \text{ N} \qquad (10)$$

Esercizio 3 - **3.1** - Poichè il conduttore è posto a massa (potenziale $V = 0$), sulla sua superficie viene richiamata dalla terra una carica Q_1 tale da annullare il suo potenziale. Il campo prodotto in ogni punto dello spazio dalle cariche Q_1 e Q si ottiene applicando il teorema di Gauss ad una superficie di Gauss di raggio r centrata nel centro comune delle due sfere. Si trova immediatamente:

$$b < r \qquad E_1 = \frac{Q + Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (1)$$

$$a < r < b \qquad E_2 = \frac{1_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[Q_1 + \frac{4}{3}\pi\rho\left(r^3 - a^3\right)\right] \qquad (2)$$

dove $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi\left(b^3 - a^3\right)} = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi 7a^3}$ (3)

è la densità di carica nell'isolante. Sostituendo la (3) nella (2) si trova:

$$a < r < b \qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[Q_1 + \frac{Q\left(r^3 - a^3\right)}{7a^3}\right] \qquad (4)$$

Il potenziale V_c della sfera condutrice è dato da:

$$V_c = \int_a^\infty E dr = \int_a^b E_2 dr + \int_b^\infty E_1 dr \qquad (5)$$

Svolgendo i calcoli, si trova: $V_c = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[Q_1 + \dfrac{9Q}{14}\right]$ (6)

Imponendo la condizione $V_c = 0$ si ottiene $Q_1 = -9\,Q/7 = -0.643\ \mu\text{C}$ (7)

3.2 - Il lavoro fatto dall'operatore è, per definizione, uguale al prodotto della carica Q per il potenziale V sulla superficie $r = 2a$ della sfera isolante.Dunque:

$$L = QV = Q\int_b^\infty E_2 dr = Q\frac{Q + Q_1}{4\pi\varepsilon_0 2a} = \frac{5}{14}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 2a} = 1.60\ 10^{-2}\ \text{J} \qquad (8)$$