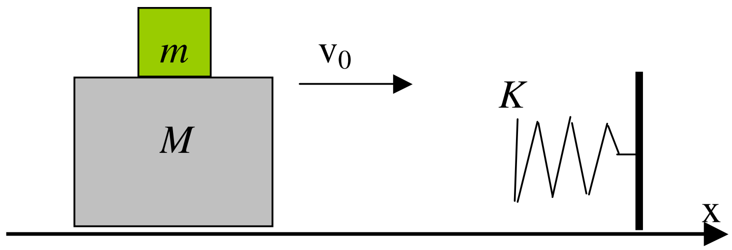
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE 11 gennaio 2010.

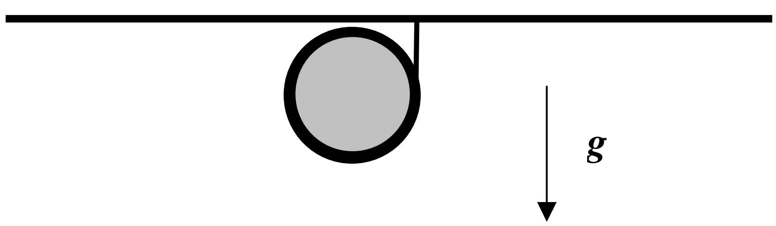
Esercizio 1: Un cubo di massa M = 3 kg si muove liberamente con velocità v_0 nel verso positivo dell' asse x orizzontale scivolando su un piano orizzontale privo di attrito. Un cubetto di massa m = 0.5 kg è appoggiato sul cubo come mostrato in figura e fra i due c'è un coefficiente di attrito statico pari a μ_s = 0.3. Ad un dato istante t = 0 il cubo inizia a toccare la molla di costante elastica K = 100 N/m inizialmente a riposo.



1.1- Si dica quale è il massimo valore v_{max} che deve avere la velocità v_0 perchè il cubetto non scivoli mai sul cubo. (5 punti)

1.2 - Supponendo, ora, che v_0 = 1 m/s ($v_0 > v_{max}$), si dica a quale istante $t = t_0$ il cubetto inizia a scivolare sul cubo. (5 punti)

Esercizio 2 - Su un cilidretto di raggio R = 1 cm e massa m = 0.3 kg è avvolto un filo inestensibile di lunghezza L = 1m. Un'estremità del filo è fissata sulla superfice del cilindretto mentre l'altra estremità è fissata al soffitto. Inizialmente il filo è totalmente avvolto sul cilindretto e il cilindretto viene tenuto fermo. Al tempo t = 0 il cilindretto viene lasciato libero di cadere.

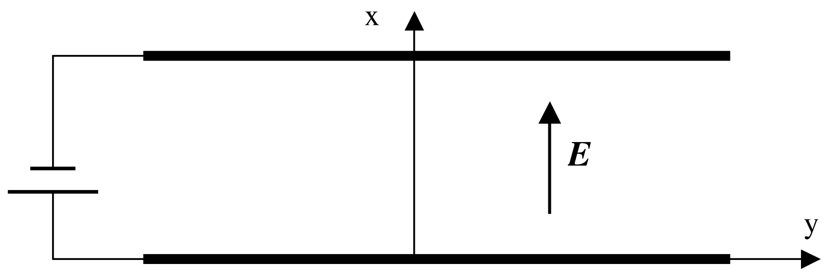


2.1 - Si dica quale è la velocità massima raggiunta dal cindretto nella caduta (si trascuri il piccolo tratto di filo inizialmente srotolato). (4 punti)

2.2 - Arrivato alla fine della corsa, il cilindretto rimbalza indietro elasticamente. Si dica a quale tempo il cilindretto torna nella posizione iniziale. (4 punti)

2.3- Supponendo che l'intervallo di tempo durante il quale avviene il "rimbalzo" sia pari a Δt = 0.001 s, si dica quale è la tensione media che deve esercitare il filo durante questo intervallo. (2 punti)

Esercizio 3- Un condensatore piano è costituito da due armature quadrate di lato L = 10 cm perfettamente conduttrici. Se indichiamo con x l'asse perpendicolare alle armature, la prima armatura si trova in $x = 0$ e la seconda in $x = d = 1$ mm. Lo spazio interno fra le armature è riempito completamente con un conduttore la cui conducibilità elettrica dipende da x secondo la legge $\sigma = \sigma_0 + k\,x$, dove $\sigma_0 = 10^{-6}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ e $k = 10^{-3}\ \Omega^{-1}\ \mathrm{m}^{-2}$. Una d.d.p. V = 3 V è applicata fra le armature.



3.1 - Sapendo che il campo elettrico presente in $x = 0$ è pari ad E_0, si calcoli il campo presente a regime negli altri punti in funzione di E_0. (3 punti)

3.2 - Si trovi il valore di E_0. (4 punti)

3.3 - Si calcoli il valore della carica elettrica Q che si accumula nel mezzo presente fra le armature in condizioni di regime (per questa domanda si assuma che la costante dielettrica del mezzo sia quella del vuoto (ε_0 = 8.854 10^{-12} F/m) e che, quindi, gli effetti dielettrici siano trascurabili) (3 punti)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1- **1.1**- Se il cubetto resta fermo rispetto al cubo, allora il sistema, dopo il tempo t = 0, si comporta come un unico corpo di massa M_T= 3.5 kg collegato ad una molla di costante elastica K. Di conseguenza, il sistema tende a oscillare armonicamente con pulsazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M_T}} = 5.35 \qquad \text{rad/s} \qquad (1)$$

Inizialmente la massa rallenta fino a fermarsi quando raggiunge il punto di massima compressione Δx_{max} della molla che s ottiene imponendo la conservazione dell'energia meccanica.

$$\frac{1}{2}M_T v_0^2 = \frac{1}{2}K\Delta x_{max}^2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta x_{max} = v_0\sqrt{\frac{M_T}{K}} = \frac{v_0}{\omega} \qquad (2)$$

In tale posizione l'accelerazione del cubetto è massima e pari in modulo a $K\Delta x_{max}/M_T = \omega v_0$. Perchè il cubetto possa avere questa accelerazione è necessari che la forza di attrito aagente su di esso possa raggiungere il valore:

$$F_a = ma_{max} = m\omega v_0 \qquad (3)$$

D'altra parte, la massima forza di attrito è $F = \mu_s\, m\, g$, dunque $F_a < F$ solo se

$$v_0 \le v_{max} = \frac{\mu_s g}{\omega} = 0.55 \text{ m/s} \qquad (4)$$

1.2 - La velocità in un moto armonico ha la forma generale:

$$v = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (5)$$

Nel presente caso, la velocità è massima al tempo t = 0, dunque $\varphi = 0$. Inoltre, poichè v (t =0) = v_0, si deduce $A = v_0$. Dunque:

$$v = v_0\cos(\omega t) \qquad (6)$$

Il modulo dell'accelerazione ad ogni istante (finchè il cubo grande resta attaccato alla molla) è:

$$|a| = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \omega\, v_0 \sin \omega t \qquad (7)$$

Il cubetto inizia a scivolare quando il modulo della forza di attrito necessaria per far accelerare il cubetto con l'accelerazione (7) supera il massimo valore $F = \mu_s\, m\, g$, cioè al tempo t_0 in cui :

$$\omega v_0 \sin \omega t_0 = \mu_s g \quad \Longrightarrow \quad t_0 = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{\mu_s g}{\omega v_0}\right) = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{v_{max}}{v_0}\right) = 0.109 \text{ s.} \qquad (8)$$

Soluzione Esercizio 2. **2.1**- Prendiamo come 0 dell'energia potenziale la posizione iniziale del centro di massa. Poichè il cilindro è inizialmente fermo, l'energia meccanica iniziale è

$$E_i = 0 \qquad (1)$$

La massima velocità verrà raggiunta quando il filo si è totalmente srotolato, cioè quando il centro di massa è sceso di una lungheza pari a L (si trascura il tratto di filo inizialmente srotolato). Dunque, l'energia meccanica finale è

$$E_f = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{max}^2 - mgL \qquad (2)$$

Dove $I = mR^2/2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto al C.M. Per la conservazione dell'energia meccanica, $E_f = E_i$ =0. Inoltre, il moto del cilindro è di rotolamento e, quindi $v = \omega R$ ad ogni istante. Ne consegue, dopo semplici passaggi algebrici,

$$E_f = \frac{3}{4}mv_{max}^2 - mgL \quad \Longrightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{4gL}{3}} = 3.61 \text{ m/s} \qquad (3)$$

2.2- Si applica al cilindro la I e II equazione cardinale della dinamica considerando come polo il C.M. Dunque:

$$mg - T = ma \qquad (4)$$

$$TR = I\alpha = \frac{mRa}{2} \qquad (5)$$

dove T = tensione del filo. Ricavando T dalla (5) e sostituendo nella (4) si trova:

$$a = \frac{2}{3} g \qquad (6)$$

Dunque, il sistema si muove di moto uniformemente accellerato e raggiunge il punto di massimo allungamento del filo al tempo t_0 tale che:

$$L = \frac{1}{2} a t_0^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t_0 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{3L}{g}} \qquad (7)$$

Dopodichè il cilindro rimbalza elasticamente e, dopo un intervallo di tempo ancora pari a t_0, ritorna nella posizione iniziale. Il tempo totale è, perciò:

$$\Delta t = 2t_0 = 2\sqrt{\frac{3L}{g}} = 1.11 \text{ s} \qquad (8)$$

2.3- La quantità di moto del cilindretto subito prima del rimbalzo è $\boldsymbol{p} = mv_{\max} \boldsymbol{k}$, dove $\boldsymbol{k}$ è il versore diretto nel verso della gravità. Dopo il rimbalzo, la q. m. cambia segno, dunque la tensione media è

$$\overline{\boldsymbol{T}} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t} = -\frac{2mv_{\max}}{\Delta t} \boldsymbol{k} = 2.17 \; 10^3 \text{ N } \boldsymbol{k} \qquad (9)$$

Soluzione esercizio 3.

3.1- A regime, la densità di corrente J è costante in ogni punto della piastra conduttrice. Poichè in $x = 0$ il campo è pari a E_0 e la conducibilità è $\sigma(0) = \sigma_0$, la densità corrente è $J = \sigma_0 E_0$. Dunque, in ogni punto vale la relazione:

$$\sigma(x)E(x) = \sigma_0 E_0 \qquad \Longrightarrow \qquad E(x) = \frac{\sigma_0 E_0}{\sigma(x)} = \frac{\sigma_0 E_0}{\sigma_0 + kx} \qquad (1)$$

3.2 - Poichè è noto il valore della ddp V fra le armature, il valore incognito di E_0 si ottiene utilizzando la relazione:

$$V = \int_0^d E(x)dx = \int_0^d \frac{\sigma_0 E_0}{\sigma_0 + kx} dx = \frac{\sigma_0 E_0}{k} \int_{\sigma_0}^{\sigma_0 + kd} \frac{1}{y} dy \qquad (2)$$

dove abbiamo fatto la sostituzione $y = \sigma_0 + kx$. La soluzione dell'integrale (2) è

$$V = \frac{\sigma_0 E_0}{k} \ln \frac{\sigma_0 + kd}{\sigma_0} = \frac{\sigma_0 E_0}{k} \ln 2 \qquad \Longrightarrow \qquad E_0 = \frac{kV}{\sigma_0 \ln 2} = 4.33 \; 10^3 \text{ V/m} \quad (3)$$

3.3 - Se si applica il teorema di Gauss a tutto il volume compreso fra le armature si trova:

$$[E(d) - E(0)]L^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (4)$$

dove

$$E(d) = \frac{\sigma_0 E_0}{\sigma_0 + kd} = \frac{E_0}{2} \qquad \text{e} \qquad E(0) = E_0 \qquad (5)$$

Sostituendo le (5) nella (4) si trova

$$Q = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0 L^2 = 1.92 \; 10^{-10} \text{ C} = 192 \text{ pC}$$