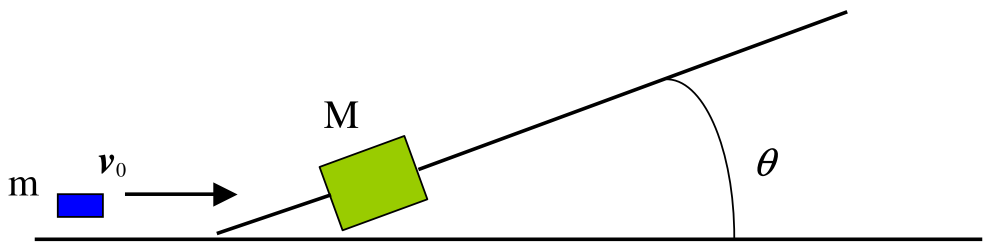
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE 16 febbraio 2010.

Esercizio 1: Un proiettile di massa m = 30 g viaggia con velocità v_0 = 100 m/s lungo un asse orizzontale. Ad un dato istante, il proiettile si conficca su un corpo di massa M = 100 g che è inizialmente fermo e vincolato a scorrere lungo una guida rettilinea inclinata con angolo di inclinazione θ = 20 ° rispetto all'orizzontale. Il tempo che passa fra l'istante in cui il proiettile tocca il corpo e quello in cui si arresta (rispetto al corpo) è Δt = 1 ms. Assumendo trascurabile ogni attrito, si calcoli

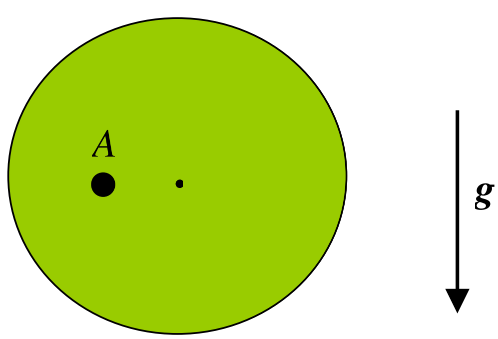


1.1- La velocità del corpo di massa M subito dopo l'urto. (4 punti)

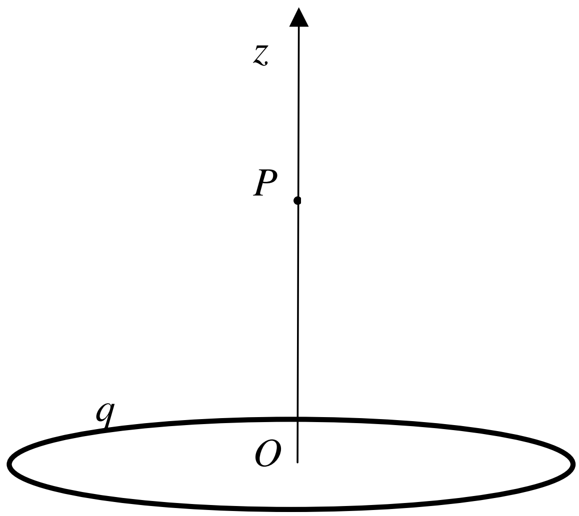
1.2 - La forza media di reazione $\overline{N}$ esercitata dalla guida inclinata sul corpo durante l'urto. (4 punti)

1.3 - La distanza L percorsa dal corpo prima di fermarsi. (4 punti)

Esercizio 2 - Un disco di spessore trascurabile e raggio R = 20 cm può ruotare liberamente senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per un punto A a distanza $d = R/2$ dal centro e avente sezione trascurabile. Al tempo iniziale il disco è fermo nel campo di gravità e disposto come in figura. Dopodichè il disco viene lasciato libero di ruotare.
2.1 - Quale è la massima velocità raggiunta dal centro di massa del disco? (5 punti)



Esercizio 3- Una carica elettrica positiva $q = 2\ \mu$C è distribuita uniformemente su un anello circolare di raggio R = 30 cm e sezione trascurabile.



3.1 - Si calcoli direzione, verso e modulo del campo elettrico in un punto P sull'asse di simmetria z in figura a distanza $d = R$ dal centro della circonferenza. (4 punti)

3.2 - Una carica elettrica negativa - q di massa m = 100 g è vincolata a muoversi lungo l'asse z. Si mostri che, se la carica è posta inizialmente ferma a piccola distanza z ($z << R$) dal centro O, essa inizia ad oscillare in modo armonico attorno ad O. Si calcoli il periodo T delle piccole oscillazioni.(5 punti)

3.3 - Una carica elettrica negativa - q è posta inizialmente nel punto O e viene, poi, portata nel punto P da un operatore esterno. Si calcoli il lavoro compiuto dall'operatore esterno (segno e valore assoluto) (4 punti)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1-

1.1- Nell'urto si conserva la quantità di moto lungo l'asse x parallelo alla guida. Inoltre, dopo l'urto, la velocità v del proiettile è uguale a quella del corpo e diretta lungo l'asse x. Dunque:

$$mv_0 \cos\theta = (m+M)v \qquad \Longrightarrow \qquad v = \frac{mv_0\cos\theta}{m+M} = 21.7 \text{ m/s} \qquad (1)$$

1.2 - L'unica forza impulsiva agente sul SISTEMA corpo-proiettile durante l'urto è la reazione ***N*** della guida che è diretta lungo l'asse y perpendicolare alla guida e giacente nel piano di figura. Le altre forze (attrito,gravità) sono trascurabili. Il valore medio di N è pari a

$$\overline{N} = \frac{I_y}{\Delta t} = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \qquad (2)$$

dove I_y = componente y dell'impulso e p_y = componente y della quantità di moto del sistema corpo-proiettile. Ma

$$\Delta p_y = p_y(finale) - p_y(iniziale) = 0 + mv_0 \sin\theta \qquad (3)$$

Dunque:

$$\overline{N} = \frac{mv_0}{\Delta t}\sin\theta = 1.03\ 10^{3} \text{ N} \qquad (4)$$

1.3 - Poichè non ci sono attriti, dopo l'urto l'energia meccanica si conserva. Dunque, l'energia finale $E_f = (m+M)g\ L \sin\theta$ è uguale a quella iniziale $E_i = (m+M)v^2/2$. Dunque, tenendo conto che v è dato dalla (1), si trova

$$(m+M)gL\sin\theta = \frac{1}{2}\frac{m^2v_0^2}{m+M}\cos^2\theta \qquad (5)$$

Risolvendo rispetto al parametro incognito L, si trova

$$L = \frac{1}{2}\frac{m^2v_0^2\cos^2\theta}{(m+M)^2 g\sin\theta} = 70.1 \text{ m} \qquad (6)$$

Soluzione Esercizio 2.

2.1- Il centro di massa del disco si trova inizialmente alla stessa altezza dell'asse A. Consideriamo questa come posizione di energia potenziale $U = 0$. La massima velocità angolare sarà raggiunta quando il centro di massa raggiunge la posizione di minima altezza a distanza d da A in basso dove l'energia potenziale è $U = - Mgd = - MgR/2$ Per la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}I_A\omega^2 - \frac{1}{2}MgR = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{MgR}{I_A}} \qquad (1)$$

dove I_A è il momento di inerzia rispetto all'asse passante per A. Per il teorema degli assi paralleli:

$$I_A = \frac{MR^2}{2} + Md^2 = \frac{3}{4}MR^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{4g}{3R}} = 8.08 \text{ rad/s} \qquad (2)$$

La massima velocità è $v_{\max} = \omega\frac{R}{2} = \sqrt{\frac{gR}{3}} = 0.808$ m/s $\qquad (3)$

Soluzione esercizio 3.

3.1- Il campo elettrico risultante è, per motivi di simmetria, diretto lungo l'asse z ed è orientato nel verso positivo dell'asse. Dunque, ci possiamo limitare a trovare la componente z del campo. La componente z del campo generato da un elemento infinitesimo di carica dq è:

$$dE_z = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{\left(R^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \Rightarrow$$

$$E_z = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{\left(R^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{\left(R^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int dq = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{\left(R^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (1)$$

Sostituendo $d = R$ nella (1) si ottiene:

$$E_z = \frac{q}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^2} = 7.06\ 10^{4}\ \text{V/m} \qquad (2)$$

3.2 - Ponendo $d = 0$ nella (1) si trova $E_z = 0$, dunque il campo è nullo in O. La stessa conclusione si poteva ottenere direttamente sfruttando la simmetria del problema. Dunque, O è un punto di equilibrio per la carica - q. Consideriamo un punto sull'asse a distanza $z << R$ da O. Il campo nel punto z si ottiende sostituendo z al posto di d in eq.(1):

$$E(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}z \cong \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}z \qquad (3)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che R^2+z^2 è circa uguale a R^2 per $z << R$. La forza agente sulla carica $-q$ è, perciò:

$$F(z) \cong -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}z = -Kz \qquad (4)$$

dove si è posto $K = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ = 1.33 N/m (5)

La forza in eq.(4) è analoga a quella di una molla con costante elastica K, dunque il moto della carica attorno al punto O è un moto armonico con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 1.72\ \text{s} \qquad (6)$$

3.3 - Il lavoro fatto dall'operatore è pari alla variazione dell'energia potenziale elettrostatica $U = - qV$, dove V è il potenziale generato dall'anello carico. Dunque:

$$L = -qV(z=d) + qV(z=0) \qquad (7)$$

Per trovare L si deve, perciò, calcolare il potenziale nei punti dell'asse z corrispondenti a $z = 0$ (punto O) e $z = R$, punto P. Il potenziale in un generico punto dell'asse a distanza z dal centro si trova sommando i potenziali infinitesimi generati da ciascun elemento di carica presente sull'anello:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}\int dq = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} \qquad (8)$$

Ne consegue che

$$V(0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \text{e} \qquad V(d) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}R} \qquad (9)$$

Sostituendo i potenziali di eq.(9) nella (7) si trova:

$$L = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.0351\ \text{J} \qquad (10)$$