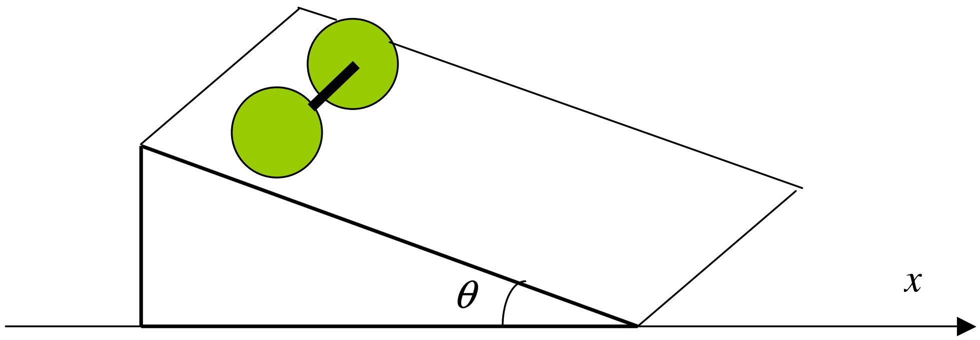
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE 27 gennaio 2010.

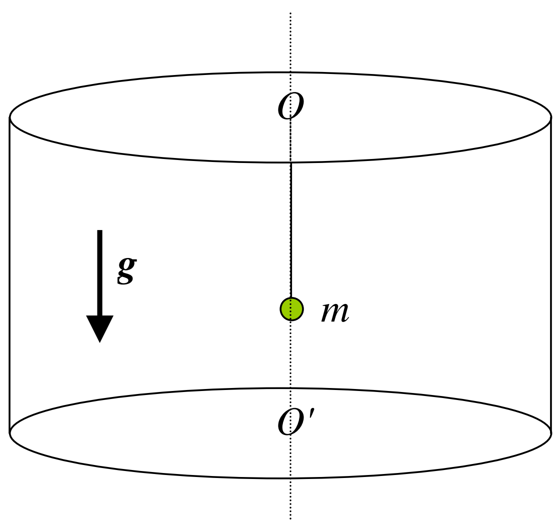
Esercizio 1: Due ruote cilindriche omogenee identiche di massa m = 0.5 kg e raggio R = 10 cm sono saldate ad un asse cilindrico coassiale di massa M = 2kg e raggio r = 2 cm come mostrato schematicamente in figura. Sia le ruote che l'asse sono pieni. Le due ruote sono appoggiate su un cuneo di angolo $\theta = 30\,°$ come mostrato schematicamente in figura con i centri di massa alla stessa altezza h = 2.1 m rispetto al piano orizzontale. Le ruote sono inizialmente ferme.



1.1- Nell'ipotesi che il moto delle ruote sia di rotolamento puro, si trovi la velocità raggiunta dalle ruote quando raggiungono il piano orizzontale. (5 punti)

1.2 - Si trovi il minimo valore che deve avere il coefficiente di attrito fra le ruote ed il piano inclinato se si vuole che le ruote non slittino, cioè che il loro moto sia di rotolamento puro. (5 punti)

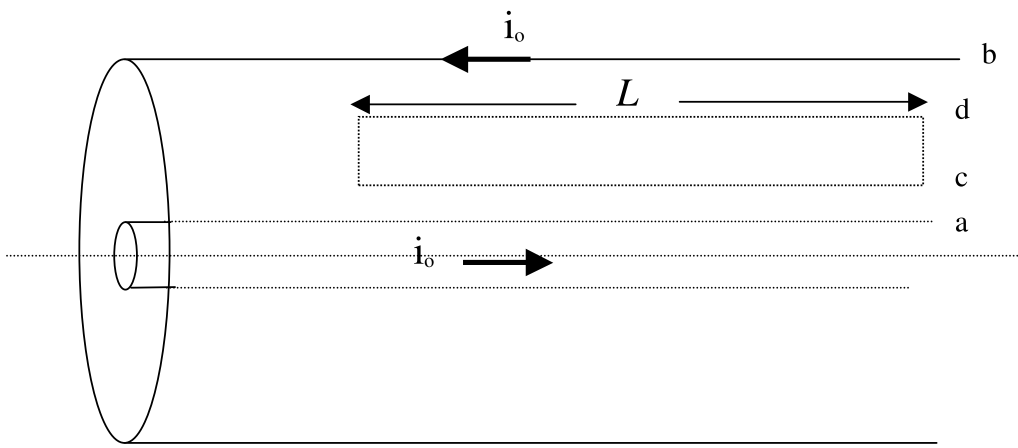
Esercizio 2 - Una giostra ruota con velocità angolare costante attorno ad un asse verticale OO'. Un corpo puntiforme di massa m è collegato ad un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L = 2 m la cui altra estremità è fissata nel punto O sul soffitto della giostra. La giostra ruota compiendo 0.5 giri al secondo



2.1 - Nelle condizioni precedenti, si osserva che in condizioni di equilibrio il pendolo si dispone in modo da formare con la verticale un angolo θ diverso da zero. Si trovi il valore dell'angolo θ (4 punti)

2.2 - Si mostri che, se la velocità angolare della giostra è inferiore ad un valore critico ω_c, il filo in equilibrio resta sempre verticale. Si determini il valore di ω_c. (4 punti)

Esercizio 3- Un cavo coassiale è costituito da un lungo cilindro conduttore pieno di raggio a = 1 mm e un guscio cilindrico coassiale di raggio b = 4 mm e spessore trascurabile. Una corrente i_0 = 3 A scorre uniformemente nel conduttore interno mentre un'uguale corrente scorre in quello esterno in verso opposto. Una spira rettangolare si trova nello spazio compreso fra i due cilindri come mostrato in figura con due lati di lunghezza L = 2 m paralleli all'asse dei cilindri e posti, rispettivamente, a distanza c = 2 mm e d = 3 mm dall'asse. La spira ha una resistenza elettrica R = 0.2 Ω e induttanza trascurabile.



3.1 - Si trovi il valore del campo magnetico in un punto a distanza $r = a/2$ dall'asse. (4 punti)

3.2 - Ad un dato istante t = 0, la corrente inizia a decrescere secondo la legge $i = i_0\, e^{-t}$. Si trovi la corrente indotta nella spira per t > 0.(4 punti)

3.3 - Si trovi direzione, verso e modulo della forza F agente sulla spira all'istante t = 0+. (4 punti)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1- **1.1**- Poichè le forze di attrito statico agenti sulle ruote non fanno lavoro, si conserva l'energia meccanica. Dunque:

$$\frac{1}{2}M_T v^2 + \frac{1}{2}I_T\omega^2 = M_T g(h-R) \qquad (1)$$

Dove $M_T = 2m+M = 3$kg è la massa totale del sistema ruote-asse mentre

$$I_T = \frac{2mR^2 + Mr^2}{2} = 54\ 10^{-4}\ \text{kg m}^2 \qquad (2)$$

è il momento di inerzia totale di inerzia. Poichè il moto delle ruote è un rotolamento puro, $\omega = v/R$ che, sostituito nella(1) fornisce dopo semplici passaggi algebrici

$$v = \sqrt{\frac{2M_T g(h-R)}{\left(M_T + \frac{I_T}{R^2}\right)}} = 5.76\ \text{m/s} \qquad (3)$$

1.2 - Indichiamo con F_a la forza <u>totale</u> di attrito statico agente sulle ruote nei punti di contatto con il cuneo. Assumiamo come verso della forza quello opposto al verso del moto delle ruote. Inoltre, prendiamo come verso positivo di rotazione quello orario. Con queste scelte, le 2 equazioni cardinali della dinamica del sistema ruote-asse si scrivono:

$$M_T g\sin\theta - F_a = M_T\frac{dv}{dt} = M_T a \qquad (4)$$

$$F_a R = I_T\frac{d\omega}{dt} = \frac{I_T}{R}a \qquad (5)$$

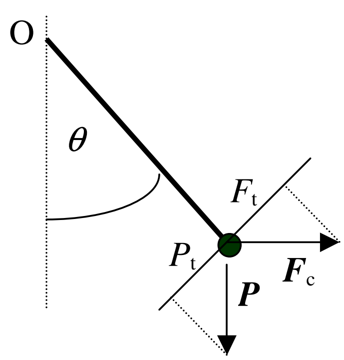
Risolvendo il sistema (4), (5) rispetto alle incognite a e F_a, si trova:

$$a = \frac{M_T g\sin\theta}{M_T + \frac{I_T}{R^2}} \quad , \quad F_a = \frac{I_T M_T g\sin\theta}{R^2\left(M_T + \frac{I_T}{R^2}\right)} \qquad (6)$$

Il minimo valore del coefficiente di attrito statico μ_s è quello per il quale la forza di attrito in eq.(6) è uguale alla massima forza di attrito statico $\mu_s M_T g \cos\theta$, dunque:

$$\mu_s = \frac{I_T\tan\theta}{\left(M_T R^2 + I_T\right)} = 0.088 \qquad (7)$$

Soluzione Esercizio 2.



2.1- Nel sistema della giostra le forze agenti sono la forza peso $\boldsymbol{P}$, la tensione della fune $\boldsymbol{T}$ e la forza apparente centrifuga $\boldsymbol{F}_c$. All'equilibrio, la componente tangenziale della forza peso ($P_t = P\ \sin\theta$ in figura) deve essere uguale ed opposta alla componente tangenziale della forza centrifuga ($F_t = F_c \cos\theta = m\ \omega^2 L \sin\theta\ \cos\theta$), cioè:

$$mg\sin\theta = m\omega^2 L\sin\theta\cos\theta \qquad (1)$$

L'eq.(1) ammette due soluzioni distinte:

$$\theta = 0 \quad \text{e} \qquad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L} \Longrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 L}\right) \qquad (2)$$

Poichè la giostra fa ν = 0.5 giri al secondo, la sua velocità angolare è $\omega = 2\,\pi\,\nu$ =3.14 rad /s. Sostituendo nella (2) si trova $\theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 L}\right)$ = 60.2 ° (3)

Le soluzioni $\theta = 0$ e θ dato dalla (3) sono entrambe di equilibrio ma solo la (3) è di equilibrio stabile. Questo si verifica facilmente osservando che la forza risultante agente sul corpo di massa *m* per qualunque valore di θ diverso dai valori in eq.(2) è sempre diretta in modo da riportare il corpo nella posizione di eq.(3) come richiesto per un equilibrio stabile.

2.2- La soluzione (3) esiste solamente se il termine fra parentesi è inferiore ad 1 (il coseno di un angolo è sempre inferiore ad 1). Dunque, se

$$\frac{g}{\omega^2 L} > 1 \qquad \text{, cioè se} \qquad \omega < \omega_c = \sqrt{\frac{g}{L}} = 2.21 \text{ rad/s} \qquad (4)$$

l'unica soluzione di eq.(1) resta $\theta = 0$ che, ora, corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile. Infatti, si verifica facilmente che, se $\omega < \omega_c$, per qualunque valore θ diverso da zero la forza è sempre diretta in modo da riportare il corpo nella posizione verticale. Dunque, ω_c di equazione (4) rappresenta la velocità angolare critica.

Soluzione esercizio 3.

3.1- Data la simmetria cilindrica, le linee di campo sono circonferenze concentriche centrate sull'asse e il verso del campo in ogni punto è dato dalla regola della mano destra (nella regione occupata dalla spira il campo è uscente dal piano delle figura). Applicando il teorema di Ampere ad una circonferenza di raggio *r* e centro sull'asse si trova:

$$B 2\pi r = \mu_0 i_{conc} \qquad \Longrightarrow \qquad B = \frac{\mu_0 i_{conc}}{2\pi r} \qquad (1)$$

Per un punto $r = a/2 < a$, $i_{conc} = i_0 r^2/a^2 = i_0/4$ che, sostituita nella (1) fornisce:

$$B = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi a} = 3\ 10^{-4}\ \text{T} \qquad (2)$$

3.2 - Nello spazio fra i fili ($a < r < b$) $i_{conc} = i_0\, e^{-t}$, dunque, dalla (1) si deduce

$$B = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 i_0 e^{-t}}{2\pi r} \qquad (3)$$

Il flusso del campo che attraversa la spira è

$$\Phi = \int_c^d \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r} e^{-t} L dr = \frac{\mu_0 i_0 L e^{-t}}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{\mu_0 i_0 L e^{-t}}{2\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \qquad (4)$$

dunque, per la legge di Faraday, la corrente che scorre nella spira è

$$I = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 i_0 L e^{-t}}{2\pi R} \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 2.43\ \mu\text{A e}^{-t} \qquad (3)$$

3.3 - Le forze magnetiche su lati perpendicolari all'asse del cavo sono uguali ed opposte mentre quelle sui lati paralleli sono opposte ma diverse essendo diverso il valore del campo in *c* e *d*. Utilizzando la regola della mano destra si trova che <u>la forza risultante è perpendicolare all'asse e diretta nel verso che va dal cilindro esterno verso l'asse del filo centrale</u>. Il modulo della forza è:

$$F = I(0)\left[B(c) - B(d)\right] L = \frac{\mu_0 I(0) i_0 L}{2\pi}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) = 4.87\ 10^{-10}\ \text{N} \qquad (4)$$