Soluzione Compito Fisica Generale I e Fisica generale Civili 12/02/2011

Soluzione Esercizio 1- **1.1**- Se si aggiunge al posto del foro un disco omogeneo con la stessa densità dell'altro mezzo e massa M_1, si ottiene un disco pieno. Dunque il centro di massa del disco pieno che è posto in $X = 0$ soddisfa la relazione

$$\frac{Mx_{CM} + M_1 a/2}{M + M} = X = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{CM} = -\frac{M_1}{M}\frac{a}{2} = -\frac{\sigma\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\sigma\pi\left[a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]}\frac{a}{2} = -\frac{a}{6} = -4.17 \text{ cm} \quad (1)$$

dove σ è la massa per unità di superficie.

1.2 - Le equazioni per l'equilibrio delle forze e dei momenti (rispetto al centro di massa)sono:

$$T_1 + T_2 = Mg \quad (2)$$

$$T_1(a + x_{CM}) - T_2(a - x_{CM}) = 0 \quad (3)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $x_{CM}<0$. Risolvendo il sistema (2), (3) , troviamo:

$$T_1 = \frac{Mg(a - x_{CM})}{2a} = 14.3 \text{ N} \quad (4)$$

1.3 - Il momento di inerzia del disco pieno di raggio a e massa $M_0 = 4M/3$ rispetto al punto A è:

$$I_0 = 2Ma^2 \quad (5)$$

mentre il momento di inerzia del disco di raggio $a/2$ che riempie il foro e che ha massa $M_1 = M/3$(vedi risposta 1.1) rispetto al punto A che si trova a distanza $3a/2$ dal suo centro è

$$I_1 = \frac{1}{2}\frac{M}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{M}{3}\left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{19}{24}Ma^2 \quad (6)$$

Se indichiamo con I il momento di inerzia del disco cavo, deve valere l'uguaglianza $I_0=I+I_1$.
Dunque:

$$I = I_0 - I_1 = \frac{29}{24}Ma^2 = 0.19 \text{ Kg m}^2 \quad (7)$$

1.4 - Dopo il taglio, il punto A resta fermo, dunque possiamo scrivere la II equazione Cardinale rispetto a tale punto che, all'istante iniziale si scrive:

$$Mg\,(a + x_{CM}) = I\,\alpha \quad (8)$$

da cui si deduce:

$$\alpha = \frac{Mg(a - a/6)}{\frac{29}{24}Ma^2} = \frac{20}{29}\frac{g}{a} = 27.1 \text{ rad/s}^2 \quad (9)$$

Esercizio 2 -

2.1- Il frammento tocca terra sulla verticale, dunque la sua velocità iniziale subito dopo l'esplosione deve essere diretta verticalmente, dunque ha la forma $\boldsymbol{v}_1 = v_1\,\mathbf{k}$ dove $\mathbf{k}$ è il versore verticale diretto verso l'alto. La legge oraria del moto unidimensionale uniformemente accelerato è:

$$z(t) = h + v_1 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

Imponendo che il frammento tocchi terra ($z(t)=0$ al tempo t dato nell'esercizio), si trova

$$v_1 = -\frac{h}{t} + \frac{gt}{2} = -26.0 \text{ m/s} \quad (2)$$

dove il segno - indica che la velocità è diretta verso il basso.

2.2 - Nell'esplosione si conserva il vettore quantità di moto del sistema di due corpi. Dopo l'esplosione si conserva la componente orizzontale del vettore quantità di moto e l'energia meccanica. Subito dopo l'urto si è conservato il **vettore** quantità di moto totale del sistema di due corpi. Dunque, tenendo conto che il frammento ha quantità di moto (nel piano verticale xz) $\boldsymbol{p}_1=(0,\ Mv_1/2)$, che la quantità di moto iniziale del Sistema è $\boldsymbol{P} =(M\ v_0,0)$ e indicando con $\mathbf{p}_2 =(Mv_x/2,Mv_z/2)$ la quantità di moto del secondo frammento, imponendo la condizione $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ si trova la velocità del secondo frammento all'istante iniziale immediatamente dopo l'esplosione:

$$\boldsymbol{v}_i = (v_x, v_z) = (2v_0, - v_1) \qquad (3)$$

Nel moto successivo, si conserva l'energia meccanica. Indicando con v il modulo della velocità del secondo frammento quando arriva a terra, la conservazione dell'energia meccanica si scrive:

$$\frac{M}{2}gh+\frac{1}{2}\frac{M}{2}\left(4v_0^2+v_1^2\right)=\frac{1}{2}\frac{M}{2}v^2 \quad \Longrightarrow \quad v=\sqrt{2gh+\left(4v_0^2+v_1^2\right)}= 59.9 \text{ m/s} \qquad (4)$$

Esercizio 3. (**FISICA GENERALE I).**

3.1- L'equilibrio termico e meccanico implica che le pressioni dei due gas sono date dall'equazione di equilibrio dei gas perfetti e che le pressioni dei due gas sono uguali. Dunque

$$\frac{n_1RT_0}{Sx}=\frac{n_2RT_0}{S(L-x)} \quad \Longrightarrow \quad n_2=n_1\frac{L-x}{x}=2n_1 \qquad (1)$$

dove S indica la sezione del cilindro. Ma il numero totale di moli è $n = n_1+n_2=3n_1=M/A$, dunque

$$n_1=\frac{M}{3A}= 0.5 \text{ moli} \qquad (2)$$

3.2 - Il setto viene spostato lentamente, dunque le trasformazioni dei due gas sono reversibili. Inoltre, poichè i gas sono isolati termicamente, le trasformazioni sono ADIABATICHE REVERSIBILI e soddisfano, perciò, le equazioni:

$$T_0V_{1i}^{\gamma-1}=T_1V_{1f}^{\gamma-1} \qquad (3)$$

$$T_0V_{2i}^{\gamma-1}=T_2V_{2f}^{\gamma-1} \qquad (4)$$

dove gli indici i ed f si riferiscono allo stato iniziale e a quello finale. Facendo il rapporto membro a membro delle equazioni (3) e (4) si trova:

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_{1i}V_{2f}}{V_{2i}V_{1f}}\right)^{\gamma-1}=\left(\frac{\frac{1}{3}SL\frac{1}{3}SL}{\frac{2}{3}SL\frac{2}{3}SL}\right)^{\gamma-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\gamma-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2/5}= \quad 0.57 \qquad (5)$$

3.3 - Il lavoro fatto **sul** sistema soddisfa la relazione: $L = U_f - U_i$, dove, essendo i gas biatomici:

$$U_f=\frac{5}{2}n_1RT_1+\frac{5}{2}n_2RT_2 \qquad (6)$$

$$U_i=\frac{5}{2}n_1RT_0+\frac{5}{2}n_2RT_0 \qquad (7)$$

Le temperature finali dei due gas T_1 e T_2 si ricavano risolvendo il sistema (3),(4) e sono:

$$T_1=T_0\left(\frac{V_{1i}}{V_{1f}}\right)^{\gamma-1}=T_0\left(\frac{1}{2}\right)^{2/5}= 227.4 \text{ K} \qquad (8)$$

$$T_2=T_0\left(\frac{V_{2i}}{V_{2f}}\right)^{\gamma-1}=T_0(2)^{2/5}= 395.9 \text{ K} \qquad (9)$$

Dunque, $U_i = 9349$ J , $U_f = 10587$ J e $L = U_f - U_i = + 1238$ J (10)

Esercizio 3 (FISICA GENERALE).

3.1 - In regime stazionario, la corrente nell'induttanza è i_0 costante nel tempo. Dunque, la f.e.m. sull'induttanza è nulla e l'induttanza si comporta come un filo di resistenza nulla (corto circuito). Il ramo contenente l'induttanza ha resistenza totale R_2 ed è sottoposto alla tensione V, dunque:

$$i_0 = V/R_2 = 0.641 \text{ A} \tag{1}$$

3.2 - All'apertura, la corrente i scorre solo nella maglia contenente R_1, R_2 e L_1 e soddisfa la condizione iniziale $i = i_0$. L'equazione della maglia è:

$$L_1 \frac{di}{dt} + R_1 i + R_2 i = 0 \tag{2}$$

la cui soluzione generale consistente con la condizione iniziale $i(0) = i_0$ è:

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3}$$

dove $\tau = L_1/(R_1+R_2) = 15.7$ μs è il tempo caratteristico.La corrente si dimezza quando $e^{-t/\tau} = 1/2$, cioè al tempo:

$$t = -\tau \ln(1/2)=10.9 \text{ μs} \tag{4}$$

3.3- L'energia immagazzinata nell'induttanza è $U = L_1 i_0^2/2$. D'altra parte questa energia è anche uguale all'energia magnetica immagazzinata nel campo magnetico e pari a $U = [B^2/(2\mu_0)]D$. Dunque, uguagliando le due espressioni dell'energia si ricava il campo di induzione magnetica:

$$B = \sqrt{\frac{\mu_0 L_1}{D}} i_0 = 7.04 \; 10^{-3} \text{ T} \tag{5}$$