XXI IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO AD UN ASSE

Consideriamo un corpo puntiforme di massa m che ruota nel piano xy attorno ad un asse verticale z passante per O come mostrato in figura. Se il sistema è destrorso, l'asse z è uscente dal piano della figura.

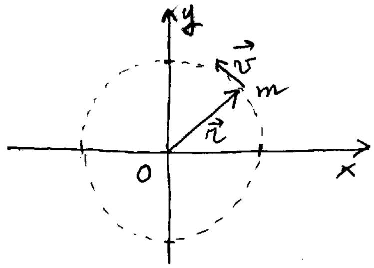


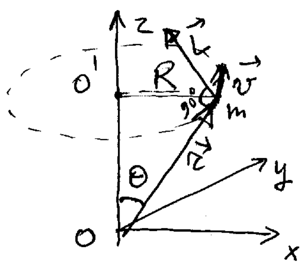
figura 1

Nel caso di figura, il momento angolare $\vec{L}$ rispetto al punto O è $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ ed è diretto lungo l'asse z nel verso positivo. In particolare, la componente z è

$$L_z = m r v = m r^2 \omega \qquad (1)$$

dove abbiamo utilizzato l'uguaglianza $v=\omega r$.

Il valore di L_z è positivo se il corpo ruota in verso antiorario come in figura mentre è negativo nel caso opposto. Cosa succede se, invece, il corpo di massa m ruota ancora attorno all'asse z ma su un piano parallelo al piano xy ma non coincidente con xy come mostrato in figura 2? In questo caso, il momento angolare rispetto ad O non è più un vettore parallelo all'asse z. Infatti $\vec{L}$ deve essere perpendicolare a $\vec{v}$ e ad $\vec{r}$ e, quindi, è inclinato rispetto all'asse z come mostrato in figura 2. Sia O' il centro del cerchio descritto dal corpo nel suo moto ed R la distanza del corpo dall'asse z.



Poiché $\vec{L}$ è perpendicolare ad $\vec{r}$, e $\vec{r}$ forma un angolo θ con l'asse z, si deduce che $\vec{L}$ forma un angolo $\pi/2-\theta$ con l'asse z. Poiché $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono ancora perpendicolari, il modulo del prodotto vettoriale $\vec{r}\times m\vec{v}$ è pari a

$$L = m r v = m r R \omega .$$

Adesso la componente z di $\vec{L}$ è

$$L_z = L\cos(\pi/2-\theta) = L\sin\theta = m R^2 \omega \qquad (2)$$

dove abbiamo utilizzato la relazione

$$r \sin(\theta) = R \qquad (3)$$

Nel caso in cui il corpo si muova nel piano xy (figura 1), la distanza R dall'asse z coincide con la distanza r dal polo O e, quindi, la (2) fornisce nuovamente la (1). In conclusione:
Se un corpo ruota attorno ad un asse, allora la componente del momento angolare lungo l'asse è la stessa per tutti i punti che giacciono sull'asse ed è pari al valore eq.(2).

Si definisce MOMENTO DI INERZIA DEL CORPO PUNTIFORME RISPETTO ALL'ASSE Z DI ROTAZIONE lo scalare

$$I = m R^2 \qquad (4)$$

Di conseguenza, la componente del momento angolare lungo l'asse z è

$$L_z = I \omega \qquad (5)$$

dove ω è la velocità angolare con cui il corpo ruota attorno all'asse. È importante osservare che L_z è solamente la componente del momento angolare lungo l'asse di rotazione e che, in generale, il vettore $\vec{L}$ può essere orientato lungo un asse diverso da z (vedi figura 2).

La relazione (5) è immediatamente generalizzabile ad un sistema di N particelle puntiformi di masse $m_1, \dots m_N$ che ruotano intorno ad un asse z con la stessa velocità angolare ω. Infatti, il momento di inerzia della singola particella è $I_i = m_i R_i^2$ dove R_i è la sua distanza dall'asse z. Dunque, il momento angolare di tale particella rispetto ad un qualunque punto sull'asse ha componente z pari a:

$$L_{z_i} = m_i R_i^2 \omega \qquad (6)$$

Ma allora, la componente z del momento angolare totale $\vec{L}_{tot}$ rispetto ad un punto generico O sull'asse è

$$L_{tot_z} = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \omega \qquad (7)$$

Poiché ω è la stessa per tutte le particelle, ω può essere portata fuori dalla somma e la (7) diventa

$$L_{tot_z} = I \omega \qquad (8)$$

dove abbiamo definito il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse come:

$$I = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \qquad (9)$$

Nel caso in cui la distribuzione di massa sia continua e costituita da un corpo solido ~~[illegible]~~ essa può essere sempre pensata come una somma infinita di particelle infinitesime di massa dm. ~~[illegible]~~

In questo caso (CORPO SOLIDO), inoltre, la velocità angolare ω di ogni punto del solido ha sempre lo stesso valore. Il generico elemento infinitesimo di massa dm che ruota attorno all'asse z, ha un momento di inerzia infinitesimo

$$dI = dm\, R^2 \tag{10}$$

dove R = distanza di dm dall'asse di rotazione. Di conseguenza, il momento angolare totale avrà componente z pari a

$$dL_z = dm\, R^2\, \omega \tag{11}$$

e l'intero corpo solido avrà un momento angolare (componente z)

$$L_z = \int dm\, R^2 \omega = I\omega \tag{12}$$

dove abbiamo definito il momento di inerzia del solido RISPETTO all'asse z:

$$I = \int dm\, R^2 \tag{13}$$

dove l'integrale è esteso all'intero corpo solido.

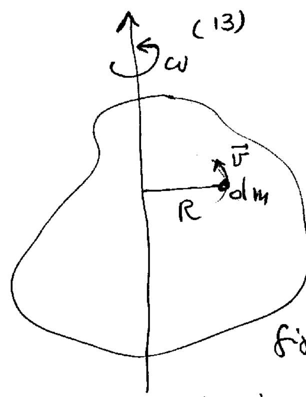


figura 3

È IMPORTANTE osservare che la velocità angolare di rotazione dei punti di un corpo SOLIDO è la stessa per tutti i punti. Infatti, in un corpo rigido, due punti che si trovano ad una data distanza l'uno dall'altro non possono variare la loro distanza. Ad esempio, consideriamo un disco rigido che ruota attorno all'asse z che passa per il suo centro. Consideriamo due punti A e B che si trovano inizialmente sull'asse x. Se il corpo ruota attorno all'asse z, dopo un dato intervallo di tempo Δt i due punti A e B si sposteranno restando, però sempre allineati lungo uno stesso raggio (vedi figura 4). Ma allora l'angolo descritto dai due punti attorno all'asse z sarà lo stesso e pari a $\Delta\theta$. Ne segue direttamente che la velocità angolare $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ è la stessa per i due punti. Questa proprietà resta valida per qualunque altro punto del solido.

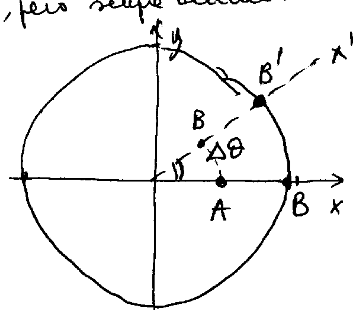


figura 4

III.1 - LA II^{a} EQUAZIONE CARDINALE PER UN CORPO SOLIDO.

Supponiamo di avere un corpo solido che ruota attorno ad un asse z. Dalla II^{a} equazione cardinale sappiamo che:

$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dz} \qquad (14)$$

Dunque, per la componente z del momento totale delle forze risulta

$$\tau_{tot_z} = \frac{d L_{tot_z}}{dt} \qquad (15)$$

Se consideriamo un polo che giace sull'asse di rotazione, allora ~~momento angolare~~ la componente z del momento angolare del corpo rispetto a tale polo è data dalla (12), di conseguenza, se sostituiamo $L_{tot_z} = I\omega$ nella (15) si deduce

$$\vec{\tau}_{tot_z} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} \qquad (16)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che il momento angolare di un corpo rigido è costante (la distanza R di un elemento infinitesimo del corpo dall'asse di rotazione non cambia nel tempo).

L'equazione (16) rappresenta la II^{a} EQUAZIONE CARDINALE per il corpo rigido e permette di determinare il moto di rotazione del corpo se sono noti i momenti di forze esterni applicati (rispetto ad un qualunque punto sull'asse di rotazione). La (16) dà informazioni solamente sul moto di rotazione (la velocità angolare ω) ma non dà nessuna informazione sul moto di traslazione. Il moto di traslazione, invece, è interamente descritto dalla I^{a} equazione cardinale che, per un corpo rigido, si scrive

$$\vec{F}_{tot} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} \qquad (17)$$

dove $\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$ è l'accelerazione del centro di massa $\vec{a}_{CM}$.

Ricordando che $\frac{d\omega}{dt}$ è l'accelerazione angolare del corpo rigido, la (16) può anche essere scritta nella forma:

$$\vec{\tau}_{tot_z} = I\,\alpha \qquad (18)$$

È IMPORTANTE ricordare che nelle (16) e nella (18) il momento delle forze deve essere calcolato rispetto ad un punto O che giace sull'asse di rotazione e che I è il momento di inerzia rispetto allo stesso asse. Inoltre, è importante ricordare che la (14) e, quindi, la (16) e la (18) sono valide solo se il polo è un punto fisso o il CENTRO DI MASSA.

III. 2 - PROPRIETÀ DEL MOMENTO DI INERZIA

Per il calcolo del momento di inerzia I di un solido risulta molto utile il teorema di HUYGENS - STEINER detto anche TEOREMA DEGLI ASSI PARALLELI:

Dati due assi paralleli di cui uno passante per il centro di massa del corpo allora il momento di inerzia I rispetto all'asse che non passa per il centro di massa è legato al momento di inerzia I_{CM} rispetto all'asse passante per il centro di massa dalla relazione:

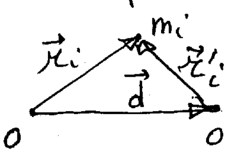
$$I = I_{CM} + M d^2 \qquad (19)$$

dove M è la massa totale del corpo e d la distanza fra i due assi paralleli. La relazione (19) andrebbe ricordata a memoria perché è molto utile. Infatti, se si conosce I_{CM}, la (19) permette di trovare rapidamente il momento di inerzia rispetto a qualunque altro asse parallelo.

Dimostrazione: Per semplicità facciamo la dimostrazione per un sistema di punti materiali ma il risultato è facilmente estendibile ad qualunque sistema continuo. Sia O' il centro di massa del sistema ed O un altro punto. Considediamo due assi paralleli che passano per O e O' (assi perpendicolari al piano della figura 5). La generica massa i-esima del sistema m_i si troverà a distanza r_i dall'asse passante per O e r_i' dall'asse passante per O'.

Dunque

$$I_O = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \quad e \quad I_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i'^2 \qquad (20)$$



ma dalla figura si vede che

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{d} \qquad (21)$$

figura 5

D'altra parte:

$$r_i^2 = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = (\vec{r}_i\,' + \vec{d}) \cdot (\vec{r}_i\,' + \vec{d}) = r_i'^2 + d^2 + 2\vec{r}_i\,' \cdot \vec{d} \qquad (22)$$

Sostituendo la (22) nell'espressione di I_0 si trova:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i'^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i d^2 + \sum_{i=1}^{N} 2 m_i \vec{r}_i\,' \cdot \vec{d} \qquad (23)$$

Osservando che $\sum_{i=1}^{N} m_i r_i'^2 = I_{CM}$ e portando fuori dalle somme i contributi costanti (d^2 e $2\vec{d}$), e ricordando che $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$, si trova

$$I_0 = I_{CM} + M d^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,'\right) \cdot \vec{d} \qquad (24)$$

ora, poiché $\vec{r}_i\,'$ è il vettore posizione rispetto al centro di massa, $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,' = 0$ e, dunque, la (24) diventa uguale alla (19).

Esempi:

Esempio 1 - Momento di inerzia di un sistema costituito da due particelle puntiformi identiche rispetto ad un asse passante per il centro di massa O e perpendicolare al segmento che congiunge le particelle (figura 6) poste a distanza d.

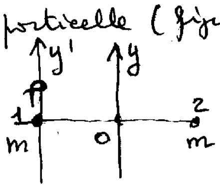


figura 6

Soluzione: entrambe le particelle distano $\frac{d}{2}$ dal C.M. Dunque, il momento di inerzia totale è

$$I_{CM} = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = m\frac{d^2}{2} \qquad (25)$$

Esempio 2 - nel caso del sistema in figura 6 calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse y' passante per P.

Soluzione: Si possono usare due metodi:

a) calcolo diretto: la particella 1 dista $r_1 = 0$ da y' mentre la 2 dista $r_2 = d$ da y'. Dunque:

$$I = m r_1^2 + m r_2^2 = m d^2 \qquad (26)$$

b) uso del teorema degli assi paralleli:

$$I = I_{CM} + M\left(\frac{d}{2}\right)^2 = m\frac{d^2}{2} + 2m\frac{d^2}{4} = m d^2 \qquad (27)$$

che coincide con la (26)

Esempio 3: Calcolare il momento di inerzia di una bacchetta omogenea e sottile di lunghezza ~~L~~ e massa M rispetto ad un asse y perpendicolare alla bacchetta e passante per il centro di massa O.

Soluzione: Dato che la bacchetta è omogenea, il centro di massa si trova al centro della bacchetta (~~...~~ i piani yz e xy sono entrambi piani di simmetria). Consideriamo un sistema di riferimento con asse x coincidente con la bacchetta e origine O nel centro di massa.

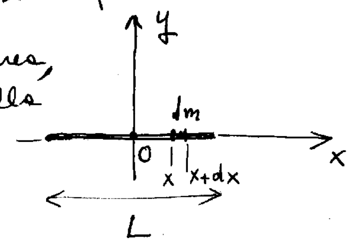


figura 7

In tale riferimento, gli estremi della bacchetta si trovano in $x_1 = -\frac{L}{2}$ e $x_2 = \frac{L}{2}$, rispettivamente. Consideriamo un generico elemento infinitesimo di massa dm che si trova ad un dato valore della coordinata x. Il momento di inerzia infinitesimo di tale elemento rispetto ad O è, perciò,

$$dI = dm\, x^2 \qquad (28)$$

D'altra parte, l'elemento di massa dm sarà contenuto in un trattino infinitesimo compreso fra x ed x+dx e, quindi, di lunghezza infinitesima dx. Poiché la massa è distribuita in modo omogeneo, la densità di massa per unità di lunghezza è $\lambda = \frac{M}{L}$ e, quindi, la massa contenuta nell'elemento dm è

$$dm = \lambda\, dx = \frac{M}{L} dx \Longrightarrow dI = \frac{M}{L} x^2 dx \qquad (29)$$

Il momento di inerzia totale si ottiene integrando i momenti infinitesimi nell'intero intervallo $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$. Dunque:

$$I_{CM} = \int_{-L/2}^{L/2} dI = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3}\Big|_{L/2}^{L/2} = \frac{M L^2}{12} \qquad (30)$$

Il risultato (30) andrebbe ricordato a memoria.

Esempio 4 - Nel caso dell'esempio precedente, si calcoli il momento di inerzia rispetto ad un asse y' passante per un estremo della bacchetta.

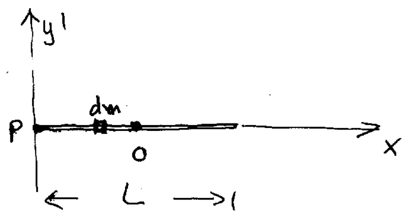


figura 8

In questo caso si possono utilizzare due metodi diversi:

a) calcolo diretto: si considera il sistema di riferimento xy' con origine nell'estremo P della barretta. Anche in questo caso, il momento di inerzia infinitesimo dovuto ad un elemento di massa dm a distanza x dall'asse y' è $dI = \frac{M x^2}{L} dx$. Dunque il momento di inerzia totale sarà ancora dato dall'integrale di dI con la sola differenza che, questa volta x rappresenta la distanza dall'asse y' e quindi x varia da $x=0$ (estremo sinistro della bacchetta) e $x=L$ (estremo destro).

Dunque:

$$I = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{M}{3} L^2 \qquad (31)$$

b) uso del teorema degli assi paralleli: Il centro di massa O dista $d = L/2$ dall'asse y'. Dunque, per il teorema degli assi paralleli

$$I = I_{CM} + M d^2 = \frac{M L^2}{12} + \frac{M L^2}{4} = \frac{M L^2}{3} \qquad (32)$$

dove abbiamo sostituito ad I_{CM} il valore trovato in eq. (30).

OSSERVAZIONE IMPORTANTE: Il momento di inerzia ha le dimensioni di una massa (Kg) per una lunghezza al quadrato (m^2). Dunque, lo studente dovrebbe sempre controllare che il risultato ottenuto abbia queste dimensioni. Sfruttando le dimensioni è facile ricordare a memoria i momenti di inerzia di solidi particolarmente semplici come aste, dischi, o sfere. Infatti, questi oggetti sono caratterizzati da un'unica lunghezza caratteristica. Ad esempio una barretta ha lunghezza L e massa M. Poiché il momento di inerzia deve avere le dimensioni $Kg\, m^2$, allora il momento di inerzia della barretta dovrà avere la forma generale $I = \alpha M L^2$ dove α è una costante numerica adimensionale. Analogamente, nel caso di un disco o di una sfera ci si aspetta $I_{disco} = \alpha_d M R^2$ e $I_{sfera} = \alpha_s M R^2$.

Gli unici parametri da menzionare sono, perciò, solamente i coefficienti numerici α, α_d, α_s.

Esercizio: lo studente calcoli il momento di inerzia di una bacchetta di lunghezza L rispetto ad un estremo P della bacchetta sapendo che la densità lineare di massa $\lambda = \frac{dm}{dl} = \lambda_0 + \alpha x$ dove x è la distanza dal punto P e λ_0 ed α sono due coefficienti numerici. (Soluzione: $I = \lambda_0 \frac{L^3}{3} + \alpha \frac{L^4}{4}$)

Esempio 5 - Si calcoli il momento di inerzia di un disco omogeneo di massa M e raggio R rispetto ad un asse z perpendicolare al disco e passante per il centro di massa del disco (centro O del disco in figura 9.

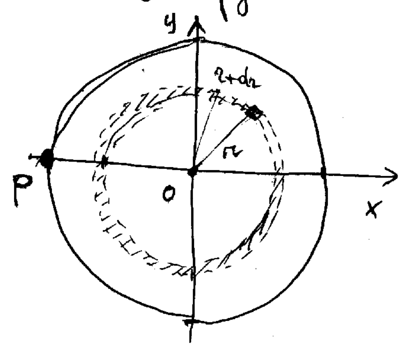


figura 9

Soluzione: prima di tutto osserviamo che l'unica lunghezza caratteristica del disco è il raggio R e, quindi il momento di inerzia dovrà risultare $I = \alpha M R^2$ con α = costante numerica.

Innanzitutto osserviamo che tutti i punti del disco che si trovano a distanza r dall'asse z passante per O danno un ugual contributo al momento di inerzia infinitesimo

$$dI = dm\, r^2 \qquad (33)$$

Dunque, il momento di inerzia infinitesimo dI dovuto alla massa contenuta nella superficie infinitesima compresa fra una circonferenza di raggio r ed una di raggio $r+dr$ (vedi fig 9) sarà pari alla massa infinitesima dM contenuta in questa superficie infinitesima moltiplicata per r^2:

$$dI = dM\, r^2 \qquad (34)$$

ora, se M è la massa totale del disco, la sua superficie è $S = \pi R^2$, dunque la massa per unità di superficie è

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} \qquad (35)$$

Ma allora, la massa dM contenuta sulla superficie infinitesima dS compresa fra r e $r+dr$ (tratteggiata in fig. 9) è

$$dM = \sigma\, dS = \frac{M}{\pi R^2}\, 2\pi r\, dr = \frac{2M r\, dr}{R^2} \qquad (36)$$

dove abbiamo sfruttato l'uguaglianza $dS = 2\pi r\, dr$ che si desume osservando che la superficie dS è la stessa di un rettangolino di lato $2\pi r$ e altezza dr (a meno di infinitesimi in $(dr)^2$).

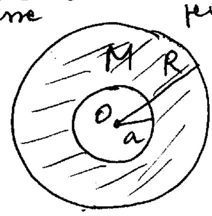
Sostituendo la (36) nella (34) e integrando sul disco si ottiene

$$I_{CM} = \int_0^R \frac{2M}{R^2} r^3\, dr = \frac{MR^2}{2} \qquad (37)$$

Il risultato (37) verrà utilizzato spesso nel seguito e negli esercizi, per cui si suggerisce allo studente di memorizzarlo. Gli estremi di integrazione in eq. (37) devono essere tali da far sì che quando r varia fra tali estremi la somma di tutte le superfici infinitesime, a forma di anello di spessore dr, permetta di ottenere l'intera superficie del disco.

<u>OSSERVAZIONE</u> <u>IMPORTANTE</u>: Il risultato (37) resta valido anche nel caso in cui il disco sia sostituito da un cilindro di ugual raggio R e di altezza h.

<u>Esercizio</u>: Un disco cavo di massa M e raggio R presenta un foro di raggio a centrato nel centro del disco O (vedi figura). Si calcoli il momento di inerzia rispetto ad un asse perpendicolare al piano della figura e passante per O.



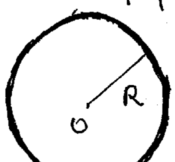
Soluzione: $I_0 = \frac{M}{2}\left(R^2 + a^2\right)$

<u>Esercizio</u>: Si calcoli il momento di inerzia rispetto ad un asse perpendicolare al disco di fig. 9 e passante per un punto P sul bordo del disco.

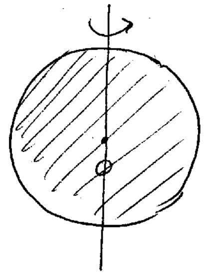
Soluzione: $I = \frac{3}{2} M R^2$

Esercizio: si calcoli il momento di inerzia di un'anello di Raggio R, massa M e sezione trascurabile (vedi figura) rispetto ad un asse perpendicolare al piano della figura e passante per O.

Soluzione: $I_0 = M R^2$



Un altro importante risultato è il momento di inerzia I rispetto ad un asse passante per ~~al centro~~ di una SFERA di raggio R massa M distribuita uniformemente all'interno della sfera. La dimostrazione è complicata e viene omessa.



$$I_{cM} = \frac{2}{5} M R^2 \qquad (38)$$

Infine, prima di finire questa lezione vogliamo ricordare una proprietà del momento di inerzia che risulta molto utile per la soluzione di esercizi:

PROPRIETÀ: Un corpo solido può essere sempre pensato come una sovrapposizione di parti distinte. Ad esempio, supponiamo di avere un'asta di massa M e lunghezza L ai cui estremi sono attaccate due sfere di masse uguali e pari ad m e di raggio R. Ovviamente il solido che si ottiene è la somma dell'asta e delle due masse.

Vale la proprietà generale:
Il momento di inerzia del solido ~~rispetto~~ ad un asse OO' è la somma dei momenti di inerzia delle sue singole parti rispetto allo stesso asse OO', cioè

$$I_{tot} = I_1 + I_2 + \dots + I_N \qquad (39)$$

Questa proprietà discende direttamente dalle proprietà generale degli integrali che l'integrale di una somma è uguale alla somma degli integrali (LINEARITÀ dell'OPERATORE INTEGRALE).

Infatti il momento di inerzia del solido è pari a

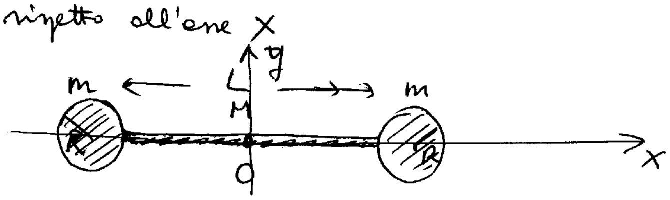
$$I_{tot} = \int dm\, r^2 \qquad (40)$$

dove l'integrale è esteso all'intero corpo. Ma l'integrale in eq. (40) può essere sempre spezzato in una somma di integrali relativi a ciascuna parte, cioè:

$$\int_{\substack{\text{sull'}\\\text{intero}\\\text{corpo}}} dm\, r^2 = \int_{\substack{\text{sul}\\\text{corpo 1}}} dm\, r^2 + \int_{\substack{\text{sul}\\\text{corpo 2}}} dm\, r^2 + \dots + \int_{\substack{\text{sul corpo}\\ N}} dm\, r^2$$

e, quindi, risulta dimostrata la (39).

Esempio: Un solido è costituito da un'asta rigida di lunghezza L, massa M e spessore trasversale ~~[illegible]~~ e da due sfere identiche di massa m e raggio R saldate ai due estremi dell'asta. a) Si calcoli il momento di inerzia del solido rispetto all'asse y ~~[illegible]~~ passante per O. b) Si calcoli il momento di inerzia del solido rispetto all'asse x.



Soluzione: a) Il momento di inerzia rispetto ad y, I_y, è la somma dei momenti dell'asta e delle due sfere rispetto ad y. Sapendo che il momento di inerzia della sfera rispetto ad un asse passante per il suo centro è $I_{sfera_{CM}} = \frac{2}{5} mR^2$ (vedi eq. 38) si può utilizzare il teorema degli assi paralleli per calcolare il momento di inerzia della sfera rispetto all'asse y:

$$I_{sfera_y} = \frac{2}{5} mR^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \qquad (41)$$

Il momento di inerzia della sbarra rispetto all'asse y è

$$I_{sbarra\,y} = M\frac{L^2}{12} \qquad (42)$$

dunque, il momento di inerzia risultante è

$$I_{totale\,y} = M\frac{L^2}{12} + 2\left(\frac{2}{5}mR^2 + m\frac{L^2}{4}\right)$$

$$= M\frac{L^2}{12} + \frac{4}{5}mR^2 + m\frac{L^2}{2} \qquad (43)$$

b) In questo caso, se la barretta ha spessore trascurabile, tutti i suoi punti si trovano a distanza $r \simeq 0$ dall'asse x e, quindi

$$I_{sbarra\,x} = \int dm\,r^2 \simeq 0 \qquad (44)$$

L'asse x, inoltre passa per i centri delle sfere che coincidono con il loro centro di massa. Dunque, il momento di inerzia di ciascuna sfera rispetto all'asse x è

$$I_{sfera\,x} = \frac{2}{5}mR^2. \qquad (45)$$

Dunque

$$I_{totale\,x} = I_{sbarra\,x} + 2I_{sfera\,x} = \frac{4}{5}mR^2 \qquad (46)$$

<u>Esercizio</u> nel caso corrispondente alla domanda b), lo studente calcoli il momento di inerzia rispetto all'asse x quando la barra ha un diametro non trascurabile e pari a d.

Soluzione : $I_{totale\,x} = \frac{Md^2}{2} + \frac{4}{5}mR^2 \qquad (47)$