## I) La conservazione del momento angolare.

Come visto in precedenza, il momento angolare totale $\vec{L}$ di un sistema di corpi rispetto ad un polo fisso O o al centro di massa del sistema soddisfa la II$^a$ equazione cardinale (1)

$$\vec{\tau}_{tot_{est}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

dove $\vec{\tau}_{tot_{est}}$ è il momento totale delle SOLE forze esterne rispetto al polo O (o al centro di massa). Vi sono alcuni casi in cui il momento totale delle forze esterne rispetto ad un dato punto O è nullo. In tal caso la (1) diventa (2)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{L} = \text{costante}$$

Dunque, il vettore momento angolare non può cambiare nel tempo e resterà sempre uguale al valore iniziale $\vec{L}_i$. In tal caso si dice che il momento angolare si conserva. Questa legge di conservazione è molto utile e si va ad aggiungere alle leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia.
Spesso accade che solo una componente (ad esempio quella lungo un asse z) del momento di forza è nulla. In tal caso (3)

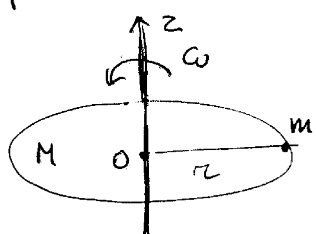
$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad L_z = \text{costante} = L_{z_i}$$

In questo caso, il vettore momento angolare $\vec{L}$ può cambiare nel tempo ma la componente del momento angolare lungo l'asse z resta sempre costante. (Lo studente noti la grande analogia con quanto visto in precedenza rispetto al vettore quantità di moto di un sistema.

La presenza di una o più leggi di conservazione permette, in molti casi, di risolvere rapidamente problemi apparentemente molto complessi. Per questo motivo, lo studente quando deve affrontare un problema nuovo, si dovrebbe sempre chiedere se è presente qualche grandezza che si conservare prima di affrontare la risoluzione del problema.

Vediamo ~~alcuni~~ un esempio

Esempio 1 – Una piastra circolare di raggio $r$ e massa $M$ ruota con velocità angolare $\omega_0$ attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Un ragazzo di massa $m$ si trova inizialmente sul bordo della piattaforma e, poi, si sposta radialmente fino a portarsi a distanza $r/2$ dal centro. Si trovi la velocità della piattaforma quando il ragazzo raggiunge la posizione finale.




Soluzione. L'unica forza esterna agente sul SISTEMA costituito dalla piastra e dal ragazzo è la forza peso

$$\vec{P} = (M+m)\vec{g} \qquad (4)$$

questa forza è diretta lungo l'asse z ~~applicata~~ ed è applicata nel centro di massa del sistema $C$. Il momento di forza rispetto ad $O$ è, perciò, $\vec{\tau} = \vec{OC} \times \vec{P}$. Poiché $\vec{P}$ è lungo z, il momento di forza deve essere perpendicolare all'asse z (per le proprietà del prodotto vettoriale). Dunque $\tau_z = 0$

$$(5)$$

e, quindi,

$$L_z = L_{zi}$$

dove $L_{zi}$ è la componente z del momento angolare del sistema rispetto all'asse z all'istante iniziale e $L_z$ quella a qualunque altro istante e, in particolare, all'istante finale.

Inizialmente $L_{zi} = I\omega_0 + m r^2 \omega_0 = \left(\frac{M}{2}+m\right) r^2 \omega_0 \quad (6)$

dove $I = \frac{MR^2}{2}$ è il momento di inerzia del disco rispetto all'asse e $mr^2$ quello del ragazzo all'istante iniziale. Quando il ragazzo si sposta in $r/2$ il suo momento di inerzia diminuisce e il momento di inerzia del sistema diventa

$$I' = M\frac{r^2}{2} + m\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{M}{2}+\frac{m}{4}\right) r^2 \qquad (7)$$

Per la conservazione del momento angolare (eq.(15)) si deduce

$$I\,\omega_0 = I'\omega \quad\Rightarrow\quad \omega = \frac{I}{I'}\,\omega_0 = \frac{\frac{M}{2}+m}{\frac{M}{2}+\frac{m}{4}}\,\omega_0 \qquad (8)$$

Quindi, essendo $I'<I$, la velocità angolare della piattaforma aumenta in modo da mantenere costante il momento angolare.

## II) GLI URTI E LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE.

In precedenza, avevamo studiato gli urti fra corpi e avevamo visto che, SE LE FORZE ESTERNE AL SISTEMA SONO TUTTE NON IMPULSIVE, la quantità di moto $\vec{p}$ del sistema si conserva. Analogamente, SE I MOMENTI DI FORZA DELLE FORZE ESTERNE RISPETTO AD UN DATO POLO O NON SONO IMPULSIVI, si conserva il momento angolare del sistema durante il brevissimo intervallo di tempo $\Delta t$ in cui dura l'urto. Infatti, se integriamo rispetto al tempo entrambi i membri della (1) si trova

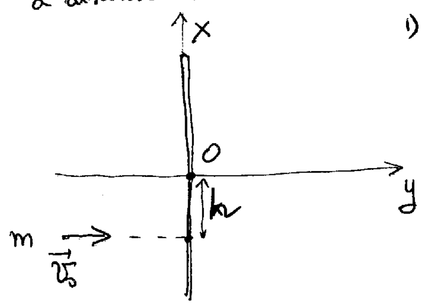
$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{\tau}_{tot\,ext}\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{d\vec{L}}{dt}\,dt \quad\Rightarrow\quad \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{\tau}_{tot\,ext}\,dt = \vec{L}_f - \vec{L}_i \qquad (9)$$

dove il membro a sinistra della (1) rappresenta l'IMPULSO DEL MOMENTO DI FORZA ESTERNO nell'intervallo di tempo $[t_0, t_0+\Delta t]$, $\vec{L}_f = \vec{L}(t_0+\Delta t)$ e $\vec{L}_i = \vec{L}(t_0)$ rappresentano, rispettivamente, i momenti angolari finale ed iniziale. Nel caso di un urto, $\Delta t \to 0$ e, dunque, l'impulso del momento di forza tende anch'esso a 0 a meno che $\vec{\tau}_{tot\,est}$ non sia enorme (momento di forza impulsivo). Dunque, se non ci sono momenti di forza impulsivi, durante l'urto

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{\tau}_{tot\,ext}\,dt \simeq 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{L}_f = \vec{L}_i \qquad (10)$$

La (10) rappresenta la legge di conservazione del momento angolare durante un urto. La (10) è molto utile quando si debba risolvere un problema comune con urti fra corpi rigidi. Per capire meglio come si può applicare questo importante principio, vediamo alcuni esempi:

Esempio 2 – Una barretta di lunghezza $L$ e massa $m$ è appoggiata su un piano orizzontale ed è incernierata ad un asse verticale passante per il suo centro O come mostrato schematicamente in figura. La barretta è libera di ruotare nel piano orizzontale attorno all'asse verticale z. Ad un dato istante, un corpo di massa $m$ che viaggia con velocità $v_0$ si conficca in un punto a distanza $h$ da O. ~~Si trovi la velocità angolare della barretta dopo l'urto~~




1) Si dica quali di queste grandezze si conservano nell'urto:
   a) quantità di moto del sistema barretta-corpo
   b) momento angolare del sistema rispetto ad O
   c) momento angolare del sistema rispetto al centro di massa del sistema.
   d) energia cinetica del sistema.
2) Si trovi la velocità angolare del sistema dopo l'urto
3) Si trovi l'impulso delle forze esterne nell'intervallo di tempo in cui avviene l'urto.

Soluzione: 1) Le forze esterne che agiscono sul sistema sono: la forza peso $\vec P=(m+m)\vec g$ applicata nel centro di massa del sistema e diretta lungo l'asse verticale perpendicolare al piano della figura (asse z), la forza di reazione vincolare $\vec R$ del piano orizzontale diretta lungo l'asse z in verso opposto a $\vec P$, l'eventuale forza di attrito $\vec F_a$ agente sulla barretta (se il piano è ruvido), la reazione vincolare $\vec R_a$ esercitata dall'asse in O sulla barretta che impedisce alla barretta di staccarsi da O. Le forze $\vec P$, $\vec R$ e $\vec F_a$ sono forze NON IMPULSIVE e, quindi, il loro contributo nel brevissimo intervallo di tempo in cui avviene l'urto è del tutto trascurabile. La reazione dell'asse $\vec R_a$, invece, può essere impulsiva (la barretta non può staccarsi dall'asse e ciò significa che l'asse si può opporre con una forza grande a piacimento a qualunque tentativo di staccare la barretta dall'asse!!). Dunque c'è una forza impulsiva $\vec R_a$ agente in O. L'impulso $\vec I$ di questa forza nell'intervallo di tempo $\Delta t$ dell'urto può essere apprezzabilmente diverso da zero e, quindi,

$$\vec I = \vec P_f - \vec P_i \quad \Rightarrow \quad \vec P_f \neq \vec P_i$$

Ciò significa che LA QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA non ~~si~~ conserva (risposta a).

1 b) L'unica forza impulsiva è $\vec{R}_a$ che è applicata in O. Poiché il braccio di tale forza rispetto ad O è nullo, il momento di forza di tale forza rispetto ad O è 0. Dunque, non ci sono momenti di forza impulsivi rispetto ad O. Di conseguenza, si conserva il momento angolare rispetto ad O e, in particolare, la componente z di tale momento angolare

$$L_{z_f} = L_{z_i}$$

1c) Stavolta, il braccio di $\vec{R}_a$ rispetto al centro di massa del sistema che non coincide con O, è diverso da zero. Dunque, non si conserva il momento angolare rispetto al centro di massa.

1d) Poiché il corpo di massa m si conficca nella barretta, l'urto è un urto totalmente anelastico e, quindi, non si conserva l'energia cinetica del sistema.

2) Per trovare la velocità angolare del sistema dopo l'urto, basta applicare la conservazione della componente z del momento angolare rispetto all'asse z passante per O. Inizialmente la barretta era ferma e, quindi, l'unico momento angolare è quello del proiettile. Se indichiamo con z l'asse verticale entrante nella figura (il sistema xyz in figura deve essere destrorso), il momento angolare iniziale lungo z è:

$$L_{i_z} = - m v_0 h$$

Il segno - deriva dal fatto che il vettore momento angolare è uscente dal piano della figura.
Subito dopo l'urto, la barretta non ha fatto in tempo a ruotare e la sua orientazione è ancora quella in figura ma, stavolta, la massa m è conficcata nella barretta nel punto a distanza h da O e ruota insieme alla barretta attorno ad O (le velocità angolari del corpo e della barretta attorno ad O sono le stesse). Conseguentemente, la componente z del momento angolare finale sarà

$$L_{f_z} = I\omega$$

dove $I = m\frac{L^2}{3} + mh^2$ è il momento di inerzia del sistema rispetto all'~~asse~~ z e $\omega$ è la velocità angolare finale. Sostituendo $I$ nella relazione precedente e imponendo l'uguaglianza $L_{fz}=L_{iz}$ si trova:

$$-mv_0h = \left(m\frac{L^2}{3}+mh^2\right)\omega \Longrightarrow \omega = -\frac{v_0 h}{\frac{L^2}{3}+h^2}$$

Il segno − indica che il moto di rotazione è antiorario.

3) Come abbiamo visto in precedenza, la reazione $\vec{R}_a$ dell'asse può essere impulsiva e, quindi, ci si aspetta che l'impulso della reazione $\vec{R}_a$ nel brevissimo intervallo di tempo in cui dura l'urto possa essere apprezzabilmente diverso da 0. Per calcolare tale impulso $\vec{I}$ utilizziamo la legge fondamentale dell'impulso:

$$\vec{I} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$$

dove $\vec{P}_f$ e $\vec{P}_i$ rappresentano i vettori quantità di moto del sistema finale (dopo l'urto) e iniziale $\vec{P}_i$ (prima dell'urto). Per calcolare $\vec{I}$, sarà, perciò sufficiente calcolare tali quantità di moto.
Inizialmente la barretta è ferma e, quindi

$$\vec{P}_i = m\vec{v}_0 = mv_0\vec{J}$$

dove $\vec{J}$ = versore asse y. Alla fine la quantità di moto del sistema è la somma della quantità di moto finale del corpo m e quella della barretta. Ma la quantità di moto di un corpo solido è $\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$ dove $\vec{v}_{CM}$ è la velocità del suo centro di massa. Nel caso della barretta, il suo centro di massa coincide con O che resta sempre fermo. Dunque la quantità di moto della barretta dopo l'urto resta ancora nullo e la quantità di moto del sistema si riduce alla q.m. del corpo m che ruota con velocità angolare $\omega$ attorno ad O a distanza h da O. Ma allora

$$\vec{P}_f = m\vec{v} = -m\omega h\,\vec{J} = \frac{mv_0h^2}{h^2+\frac{L^2}{3}}\vec{J}$$

Dunque $$\vec{I} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \left(\frac{mv_0h^2}{h^2+\frac{L^3}{3}} - mv_0\right)\vec{J} = -\frac{mv_0L^3}{3\left(h^2+\frac{L^3}{3}\right)}\vec{J}$$

Dunque, la forza di reazione esercitata dall'asse durante l'urto è diretta in verso opposto all'asse y. Infatti, come appare ovvio, se non ci fosse il vincolo in O, la barretta verrebbe sospinta in avanti dall'urto con il proiettile. Dunque, il vincolo dovrà esercitare una forza IMPULSIVA diretta nel verso opposto.