I - LA PRESSIONE p

Iniziamo con il definire una importante grandezza che caratterizza lo stato termodinamico di un corpo: la pressione p. Consideriamo una superficie piana di area A su cui sono applicate delle forze. Sia $F_\perp$ la componente della forza risultante $\vec{F}$ lungo l'asse perpendicolare alla superficie, allora si definisce:

Definizione: si dice pressione media esercitata sulla superficie di area A la forza normale per unità di superficie cioè

$$p = \frac{F_\perp}{A} \tag{1}$$

Questa grandezza viene detta pressione media perché, in generale la forza può essere distribuita in modo non uniforme sulla superficie. Ad esempio se consideriamo una piastra di area A su cui è appoggiata una massa M come in figura 1, è evidente che la forza agente sulla superficie della piastra è dovuta al contatto fra il corpo di massa M e la superficie ed è, quindi, applicata solamente nei punti di contatto fra il corpo e la superficie.

figura 1

Conviene, perciò, definire anche la pressione agente in un dato punto della superficie P individuato dal vettore posizione $\vec{r}$. Consideriamo, quindi, un piccolo elemento di superficie (elemento infinitesimo) di area dA che contiene il punto P.

Se dA è sufficientemente piccolo, ci si deve aspettare che la forza normale applicata su di esso sia anch'essa infinitesima e pari a $dF_\perp$ e che, essendo i punti della superficie considerata molto vicini a P, la forza sia distribuita uniformemente su tutta la superficie. Dunque, si può definire pressione locale nel punto $\vec{r}$ la grandezza

$$p(\vec{r}) = \frac{dF_\perp}{dA} \tag{2}$$

Dalla definizione si vede che p è una grandezza scalare e le sue dimensioni sono quelle di una forza diviso una superficie, dunque si misura in Newton/metro quadro $= N/m^2$.

Questa unità nel sistema SI viene detta <u>PASCAL</u>

$$1\,Pa = 1\,N/m^2 \qquad (3)$$

Spesso nei libri viene usata anche un'altra unità di misura, l'Atmosfera. 1 Atmosfera corrisponde alla pressione media dell'aria sulla superficie terrestre.. Vale la relazione:

$$1\,Atm = 1.013 \times 10^5\,Pa \simeq 10^5\,Pa \qquad (4)$$

Se si conosce la pressione locale $p(\vec{r})$ agente in ogni punto di una superficie piana S, allora la forza totale normale alla superficie piana si ottiene semplicemente sommando tutte le forze agenti su ciascun elemento di superficie. In particolare, dalla (2) si deduce che la forza infinitesima $dF_\perp$ agente sull'elemento di superficie di area dA è

$$dF_\perp = p(\vec{r})\,dA \qquad (5)$$

dunque, la forza totale si ottiene da:

$$F_\perp = \int_{su\,S} dF_\perp = \int_{su\,S} p(\vec{r})\,dA \qquad (6)$$

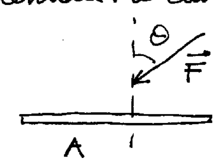
dove l'integrale viene fatto su tutti i punti della superficie. Nel caso particolare in cui $p(\vec{r}) = \text{costante} = p$ in ogni punto, allora p può essere portato fuori dall'integrale (6) e

$$F_\perp = p\int dA = p\,A \qquad (7)$$

dove A è l'area totale della superficie considerata.

ATTENZIONE! NELLO SCRIVERE LA 6 ABBIAMO FATTO L'IPOTESI SEMPLIFICATIVA CHE LA SUPERFICIE S È PIANA.

<u>Esercizio</u> 1: Una piastra di area A è sottoposta ad una forza $\vec{F}$ che forma l'angolo θ con l'asse normale. Si trovi la pressione media a cui è sottoposta la superficie della piastra.



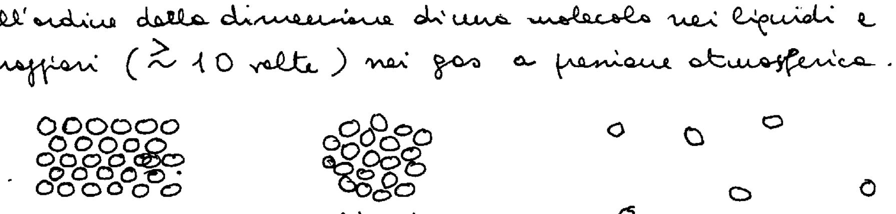
Soluzione: la forza normale è $F_\perp = F\cos\theta$. Dunque, la pressione media è $p = \frac{F_\perp}{A} = \frac{F\cos\theta}{A}$

Si noti che, a parità di forza normale applicata, la pressione p definita in eq. (1) cresce al diminuire della superficie. Quindi, se una forza viene applicata su una superficie di area A molto piccola, la pressione può diventare molto grande. Questa proprietà viene sfruttata in molte applicazioni pratiche. Ad esempio, se si vuole piantare un cilindretto metallico nel terreno, l'operazione risulta estremamente più facile se l'estremità del cilindretto viene sagomata in modo da avere una punta conica. In tal caso la superficie della punta può diventare molto piccola e, conseguentemente, la pressione applicata sul terreno quando il cilindretto viene spinto con una forza $\vec{F}$ risulta molto superiore a quella ottenibile nel caso in cui la punta è assente. Questo è il motivo della forma che hanno alcuni tipici strumenti come i chiodi, i picchetti, le asce ecc...

Analogamente, se si vuole ridurre la pressione esercitata, si deve aumentare la superficie su cui è applicata la forza. Per esempio, se si vuole camminare sulla neve senza affondare è conveniente procurarsi delle racchette da neve la cui area è molto maggiore dell'area della suola delle scarpe.

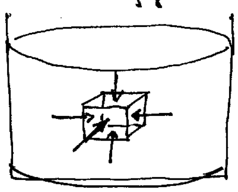
II - LA PRESSIONE NEI FLUIDI

La materia si può presentare in tre stati diversi: lo stato solido, lo stato liquido e lo stato gassoso. Un solido ha forma e volume ben definiti. Un liquido ha volume ben definito ma assume la forma del contenitore in cui viene posto. Infine un gas (come l'aria) non ha né volume né forma definiti ma assume il volume e la forma del contenitore in cui viene posto. Dal punto di vista microscopico, in un solido le molecole si dispongono in posizione fissate nello spazio mentre nei liquidi e nei gas le molecole sono distribuite in modo casuale e si spostano in continuazione da un punto all'altro. La differenza fra liquidi e gas è legata solamente alle distanze medie fra le molecole che sono dell'ordine della dimensione di una molecola nei liquidi e molto maggiori ($\gtrsim 10$ volte) nei gas a pressione atmosferica.



solido cristallino — liquido — gas

XXIV 2'. I <u>fluidi</u> sono un insieme di molecole distribuite in modo casuale, dunque, sia gas che liquidi sono fluidi. La caratteristica fondamentale dei fluidi è che essi possono esercitare solamente forze di pressione su un corpo che sia in <u>contatto</u> con essi ed è <u>fermo</u> rispetto ad essi. Ricordando che con forza di pressione si intende una forza <u>normale</u> alla superficie, i <u>Fluidi</u> <u>possono</u> <u>esercitare</u> <u>solo</u> <u>forze</u> <u>normali</u> sui corpi fermi rispetto ad essi. Se, ad esempio, consideriamo un cubettino di un materiale immerso in un recipiente contenente un fluido, le forze esercitate sulle superfici del cubettino dal fluido sono sempre orientate come mostrato in figura 2. Si noti che la forza è <u>sempre</u> diretta <u>dal</u> fluido verso la superficie del corpo.



<u>figura 2</u>

Se dA è l'area infinitesima di un elemento di superficie del corpo, allora la forza esercitata sull'elemento di superficie è

$$d\vec{F} = p\,\vec{n}\,dA \qquad (8)$$

dove p è la pressione del fluido nel punto dove si trova l'elemento di superficie e $\vec{n}$ è il versore ortogonale alla superficie diretto nel verso che va <u>dal fluido</u> <u>al corpo</u> <u>in contatto</u> <u>con esso</u> (ovviamente, per il principio di azione e reazione l'elemento di superficie del corpo esercita una forza <u>uguale</u> e <u>contraria</u> sul fluido). La pressione p in eq. (8) può variare in generale da punto a punto nel fluido, cioè $p = p(\vec{r})$.

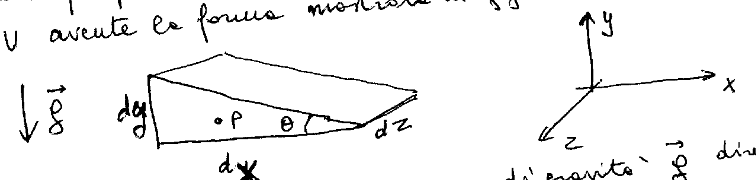
È noto a tutti, ad esempio, che la pressione dell'aria diminuisce quando si sale su una montagna e cresce, invece, se ci immergiamo ad una certa profondità nel mare.

Una proprietà importante dei fluidi è che la pressione p esercitata dal fluido su una superficie infinitesima dS posta nel punto $\vec{r}$ non dipende dall'orientazione della superficie ma solamente dal valore di $\vec{r}$. Ciò significa che la forza infinitesima agente sulla superficie può essere sempre scritta nella forma generale:

$$d\vec{F} = p(\vec{r})\, dS\, \vec{n}$$

dove $\vec{n}$ è la normale alla superficie diretta nel verso che va dal fluido verso la superficie e $p(\vec{r})$ è la pressione nel punto $\vec{r}$ il cui valore non dipende dall'orientazione del versore $\vec{n}$.

DIMOSTRAZIONE: Per dimostrare questa proprietà, consideriamo un qualunque punto P all'interno di un fluido e un volumetto infinitesimo dV avente la forma mostrata in figura e contenente il punto P.

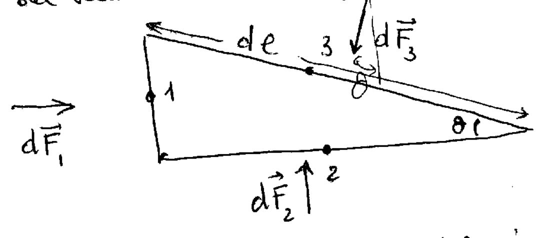


Supponendo che ci sia un campo di gravità $\vec{g}$ diretto lungo l'asse x, l'equazione del moto del volumetto è

$$d\vec{F} + dm\,\vec{g} = dm\,\vec{a} \Rightarrow d\vec{F} = dm(\vec{a} - \vec{g}) \quad (1)$$

dove $d\vec{F}$ è la forza esercitata dal fluido esterno al volumetto sulle superfici del volumetto, dm è la massa infinitesima del volumetto che è pari a $dm = \rho\, dV = \rho \frac{dx\, dy\, dz}{2}$

Consideriamo le componenti x ed y della forza $d\vec{F}$. esse sono dovute solamente alle forze di pressione agenti sulle superfici 1, 2 e 3 mostrate nella figura sotto. Le forze di pressione agenti sulle altre superfici del volumetto sono, infatti, dirette lungo l'asse z. Le aree delle superfici infinitesime dS_1, dS_2 e dS_3 sono:



$$dS_1 = dy\, dz \;;\; dS_2 = dx\, dz \;;\; dS_3 = d\ell\, dz \quad (2)$$

dove

$$d\ell = \frac{dx}{\cos\theta} = \frac{dy}{\sin\theta} \quad (3)$$

$$dF_x = dF_{1x} + dF_{3x} = p_1\, dS_1 - p_3\, dS_3 \sin\theta = \rho \frac{dx\, dy\, dz}{2}\, a_x \quad (4)$$

$$dF_y = dF_{2y} + dF_{3y} = p_2\, dS_2 - p_3\, dS_3 \cos\theta = \rho \frac{dx\, dy\, dz}{2}\, (a_y - g) \quad (5)$$

me

$$p_1\, dS_1 = p_1\, dy\, dz \qquad e \qquad p_2\, dS_2 = p_2\, dx\, dz$$

mentre

$$p_3\, dS_3 \sin\theta = p_3\, dl\, dz \sin\theta = p_3\, dy\, dz$$

e

$$p_3\, dS_3 \cos\theta = p_3\, dl\, dz \cos\theta = p_3\, dx\, dz$$

Sostituendo questi valori nelle (4) e (5) e dividendo entrambi i membri per $dy\,dz$ e $dx\,dz$, rispettivamente, si trova

$$p_1 - p_3 = \rho \frac{dx}{2}\, a_x \qquad (6)$$

$$p_2 - p_3 = \rho \frac{dy}{2}\, (a_y - g) \qquad (7)$$

ma dx e dy sono infinitesimi. Quando dx e dy tendono a zero, le tre superfici 1, 2 e 3 in figura si avvicinano l'una all'altra e tendono ad incontrarsi tutte nello stesso punto P individuato da un vettore posizione $\vec{r}$. Contemporaneamente, i membri a destra nelle (6) e (7) tendono a zero e, quindi, le (6) e la (7) si riducono a

$$p_1 = p_3 \qquad e \qquad p_2 = p_3 .$$

Dunque, la pressione esercitata sulle tre superfici dal fluido circostante è la stessa indipendentemente dall'orientazione delle superfici.

III - VARIAZIONE DELLA PRESSIONE CON LA PROFONDITÀ

Consideriamo un fluido che sia immobile, cioè in condizioni di equilibrio. Sia xyz un sistema di assi Cartesiani ortogonali con l'asse z parallelo al campo di gravità $\vec{g}$ come mostrato in figura. La domanda che ci poniamo è la seguente: come varia la pressione all'interno del fluido? Sfruttando la condizione di equilibrio dimostreremo che la pressione è costante su ciascuna superficie orizzontale (parallela al piano xy) individuata da un ben preciso valore di z, mentre essa varia lungo l'asse z parallelo al campo di gravità. Dunque

$$p = p(z).$$

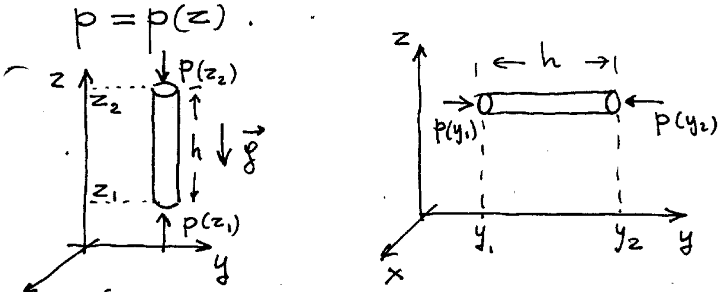


figura 3a — figura 3b

Innanzitutto dimostriamo che p = costante su un piano orizzontale. Per far ciò consideriamo un piccolo volumetto cilindrico all'interno del fluido di superficie di base A e lunghezza h con l'asse parallelo all'asse y (vedi figura 3b).

Il fluido contenuto all'interno del volumetto è fermo ($\vec{a}_{fluido} = 0$). Dunque la forza totale agente su di esso deve essere nulla. La forza totale $\vec{F}_{tot}$ sarà, in generale, data dalla somma della forza peso $M\vec{g}$ (M = massa del fluido contenuto nel volumetto) e della risultante $\vec{F}_p$ delle forze di pressione esercitate dal fluido esterno al cilindretto sulla superficie del cilindretto. Poiché $M\vec{g}$ è diretta lungo l'asse verticale z, la componente y della forza totale deve essere dovuta solamente alle forze di pressione. D'altra parte $\vec{a}_{fluido} = 0 \Rightarrow a_{fluido\,y} = 0 \Rightarrow F_{tot\,y} = F_{p\,y} = 0$.
Dunque la somma di tutte le forze di pressione sulla superficie del volumetto deve avere componente nulla lungo y. D'altra parte, le forze di pressione esercitate sulla superficie cilindrica

del cilindretto sono perpendicolari all'asse del cilindro e, quindi all'asse y in fig 3b. Ne consegue che le uniche forze di pressione dirette lungo l'asse y sono quelle agenti sulle superfici di base del cilindretto in figura 3b. Dunque la componente y della forza totale agente sul cilindretto è

$$F_{tot\,y} = p(y_1)\,A - p(y_2)\,A = 0 \qquad (9)$$

da cui si deduce che $p(y_1) = p(y_2)$, cioè la pressione del fluido deve essere costante se ci si sposta lungo l'asse y orizzontale. Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per un qualunque cilindretto il cui asse giace nel piano parallelo al piano xy. Dunque la pressione in un fluido in <u>equilibrio idrostatico</u> è costante su ciascun piano orizzontale.

Diverso è la situazione lungo l'asse z (vedi fig 3a), perchè, il fluido è soggetto alla forza di gravità che ha una orientazione lungo l'asse z. Dunque, se consideriamo il cilindretto verticale in figura 3a, la forza totale agente su di esso lungo l'asse z è la somma della forza peso $M\vec{g}$ e delle forze di pressione agenti sulle due superfici di area A poste alle altezze z_1 e z_2 (i versi delle forze di pressione sono quelli in figura 3a). Dunque, la condizione di equilibrio, implica:

$$F_{tot\,z} = -Mg + p(z_1)\,A - p(z_2)\,A = 0 \qquad (10)$$

cioè

$$p(z_2) = p(z_1) - \frac{M}{A}\,g \qquad (11)$$

dove M = massa totale del fluido contenuto nel cilindretto ($M>0$) di altezza $h = (z_2 - z_1)$ e area di base A. La relazione (11) ci dice, in generale, che la pressione in un fluido diminuisce all'aumentare dell'altezza.

Nel caso particolare in cui il fluido è un liquido (ad esempio acqua), la densità ρ (ρ = massa/unità di volume) è praticamente costante e indipendente da z. Ad esempio, nell'acqua, $\rho \sim 1\,g/cm^3$ dovunque. Dunque, la massa M

contenuto nel volumetto cilindrico è $M = \rho A h = \rho A (z_2 - z_1)$ e la (11) diventa

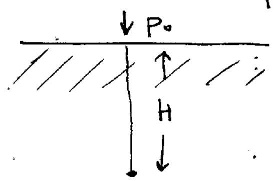
$$\boxed{p(z_2) = p(z_1) - \rho g (z_2 - z_1)} \qquad (12)$$

LEGGE DI STEVINO

La (12) è la relazione fondamentale che permette di calcolare la pressione in ogni punto di un liquido omogeneo al variare dell'altezza. È importante notare che la pressione in un generico punto z_2 può essere trovata utilizzando la (12) solamente se esiste un punto z_1 in cui il valore della pressione è nota.

• Un'altra proprietà molto importante che vale sempre è che la pressione non può essere discontinua, cioè se Q_1 e Q_2 sono due punti generici, allora $p(Q_2) \to p(Q_1)$ per $Q_2 \to Q_1$. Questa proprietà può essere dedotta facilmente imponendo la validità dell'equazione di Newton ad un cubettino infinitesimo di lati dx, dy e dz all'interno del fluido. (Lo studente provi a fare questa dimostrazione). Questa proprietà, come vedremo, è molto utile per il calcolo della pressione in un fluido.

Esempio: Sapendo che la pressione atmosferica è $p_0 \simeq 10^5$ Pa sulla superficie del mare, a) Quale è la pressione ad una profondità H rispetto alla superficie? b) Per quale valore di H la pressione è $2p_0$?



Soluzione: a) la pressione dell'aria immediatamente a contatto con la superficie del mare è p_0. Poiché p deve essere continua allora la pressione in un punto sulla superficie immediatamente a contatto con l'aria deve essere ancora pari a p_0. Dunque, se indichiamo con z_1 la coordinata z (asse verticale) di un punto sulla superficie, $p(z_1) = p_0$. Un punto a profondità H avrà coordinata $z_2 = z_1 - H$, dunque dalla 12 si deduce

$$p(z_2) = p_0 + \rho g H$$

b) $p(z_2) = 2p_0 \Rightarrow p_0 = \rho g H \Rightarrow H = \dfrac{p_0}{\rho g} \simeq \dfrac{10^5 \text{ Pa}}{10^3 \frac{Kg}{M^3} \; 9.8 \, M/s^2} \simeq 10 \text{ m}$

dunque la pressione aumenta di 1 atmosfera $\simeq 10^5$ Pa se la profondità è circa 10 m.

La (12) vale per un liquido omogeneo di densità ρ costante. Nei gas la densità varia con l'altezza e, quindi, la (12) non è più applicabile (resta però valida la (11)). Comunque, la variazione di pressione di un gas con l'altezza è molto piccola. Infatti, la densità di un tipico gas è normalmente diversi ordini di grandezza più piccola di quella dell'acqua. Ad esempio, l'aria a livello del suolo ha una densità dell'ordine di $\frac{1}{1000}$ di quella dell'acqua. Dunque, la variazione di pressione in aria quando l'altezza varia di 1 m è appena $\Delta p \sim \rho_{aria}\, g \cdot 1\,m \simeq 10\ Pa \simeq 10^{-4}$ Atm.. Ne consegue che, come faremo spesso nel seguito, <u>la pressione di un gas contenuto in un contenitore può essere considerata costante in ogni punto</u>.

– I VASI COMUNICANTI E LA LEVA IDRAULICA

Consideriamo due bacinelle cilindriche contenenti un liquido. Le bacinelle sono collegate attraverso un tubo orizzontale che permette il passaggio da una bacinella all'altra del liquido.

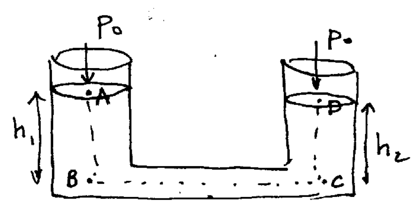


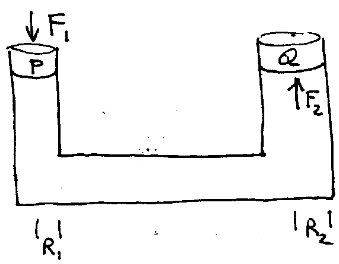
figura 7

Se le due superfici libere del liquido sono a contatto con l'atmosfera, allora i due punti A e D sulla superficie del liquido si trovano alla pressione atmosferica p_0 ($p_A = p_D = p_0$). D'altra parte se consideriamo i due punti B e C che si trovano alla stessa altezza rispetto al suolo, $p_B = p_C$.
Infatti, come abbiamo visto, la pressione in un fluido omogeneo è la stessa per punti con la stessa coordinata z.
ma $p_B = p_A + \rho g h_1 = p_0 + \rho g h_1$ e $p_C = p_D + \rho g h_2 = p_0 + \rho g h_2$

l'uguaglianza delle pressioni $p_B = p_C$ impone, quindi, $h_1 = h_2$, cioè le superfici del liquido nei vasi comunicanti si devono trovare alla stessa altezza!! Questo è il PRINCIPIO DEI VASI COMUNICANTI.

Il sistema in figura 7 viene sfruttato per costruire la leva idraulica che permette di esercitare forze molto elevate a partire da forze molto più deboli. Leve idrauliche vengono, ad esempio, utilizzate per sollevare oggetti molto pesanti come automobili, camion .....

Un liquido (normalmente olio) è contenuto in un sistema come quello mostrato in figura dove le parti verticali sono cilindri di raggio interno R_1 e R_2 con $R_2 \gg R_1$. Una forza F_1 viene applicata nel fluido per mezzo del pistone P e viene trasmessa attraverso al fluido sotto forma di pressione fino ad un pistone Q a contatto con il fluido nel cilindro di raggio R_2.



Se i due pistoni si trovano alla stessa altezza, la pressione del fluido agente sulle superfici dei due pistoni ha lo stesso valore.

Ma se F_1 è la forza totale esercitata dal pistone P (F_1 è la somma della forza esercitata dall'operatore e della forza peso agente sul pistone P), allora la pressione del fluido in contatto con il pistone P è $p = \frac{F_1}{\pi R_1^2}$. Questa pressione si trasmette al secondo pistone e dà luogo ad una forza $F_2 = p\,\pi R_2^2 = F_1 \frac{R_2^2}{R_1^2}$ agente sul secondo pistone. Dunque, se $R_2 \gg R_1$, la forza F_2 che viene esercitata sul secondo pistone può essere molto maggiore della forza esercitata dall'operatore.

Esercizio 2: con una leva idraulica si vuole sollevare una automobile di 1000 Kg applicando una forza di 500 N. Quale deve essere il rapporto dei raggi R_2/R_1?

Soluzione: Per sollevare una massa di 1000 Kg si deve applicare una forza F_2 uguale o superiore alla forza peso $Mg = 9800\ N$.

D'altra parte, $F_2 = \frac{R_2^2}{R_1^2} F_1 \Rightarrow$

$$F_2 \geq Mg \quad \Rightarrow \quad \frac{R_2^2}{R_1^2} \geq \frac{Mg}{F_1} = 19.6 \quad \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} \geq \sqrt{19.6} = 4.43$$

IV - MISURE DI PRESSIONE

La relazione (12) può essere utilizzata per costruire semplici strumenti per la misura della pressione. Un primo strumento è il manometro a tubo aperto mostrato schematicamente in figura 8. Il gas di cui si vuole misurare la pressione p è collegato ad un tubo ricurvo contenente un liquido (mercurio). L'estremità del tubo è aperta in modo che la superficie del liquido sia in contatto con l'aria. I punti del liquido in A e B si trovano alla stessa altezza e, perciò $p_A = p_B$. D'altra parte il punto A è in contatto con il gas di pressione p $\Rightarrow$ $p_B = p_A = p$. D'altra parte, per la legge (12),

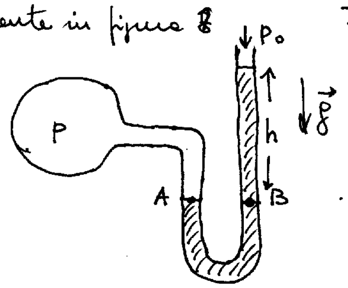
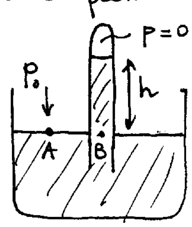


figura 8.

$$p_B = p_0 + \rho g h \quad \Rightarrow \quad p = p_0 + \rho g h \qquad (13)$$

dunque, se si misura l'altezza h, si ottiene $p - p_0 = \rho g h$ cioè la pressione relativa del gas rispetto all'aria circostante.

Uno strumento per la misura della pressione assoluta p di un gas è il barometro di Torricelli. Un tubo contenente mercurio e chiuso ad una estremità, viene rovesciato in una bacinella contenente mercurio. Il mercurio contenuto nel tubo inizia, perciò, a scendere lasciando una regione vuota dove la pressione è quasi uguale a zero. Se la pressione dell'ambiente esterno è p_0, allora $p_0 = p_A = p_B$ dove A e B sono i due punti del mercurio mostrati in figura. D'altra parte, essendo $p = 0$ alla sommità del mercurio, deve anche valere la relazione



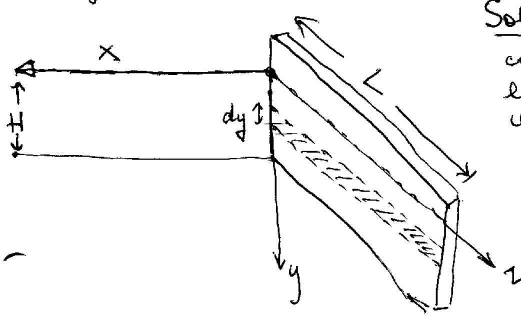
$$p_0 = 0 + \rho g h = \rho g h \qquad (14)$$

dove h è l'altezza raggiunta dal mercurio nel tubo rispetto al livello della superficie di mercurio nella bacinella.

A temperatura $T = 0°C$ il mercurio ha densità $\rho = 13.6 \times 10^3 \ Kg/m^3$ cioè circa 14 volte quella dell'acqua. Corrispondentemente, se la pressione esterna è $p_0 = 1 \ Atm = 1.013 \times 10^5 \ Pa$, l'altezza della colonna di mercurio è

$$h = \frac{p_0}{\rho g} = 0.760 \ m = 760 \ mm$$

<u>Esercizio 3</u>: L'acqua in un bacino arriva ad altezza H su una diga di lunghezza L. a) Calcolare la forza totale <u>esercitata dall'acqua</u> sulla diga. b) La pressione media sulla diga. c) La forza <u>orizzontale</u> <u>totale</u> agente sulla diga.



<u>Soluzione</u>: a) Scegliamo il sistema di coordinate xyz con origine sulla superficie libera dell'acqua. La pressione esercitata in un punto della diga dipende solamente dalla profondità y, dunque è costante su una generica striscia di lunghezza L e altezza infinitesima dy (vedi figura). La forza è diretta lungo l'asse x in verso <u>negativo</u> ed è

$$d\vec{F} = -p(y) L \, dy \, \vec{i}$$

dove $\vec{i}$ = versore asse x perpendicolare alla diga. Ma $p(y) = p_0 + \rho g y$ dove p_0 è la pressione atmosferica. La forza totale si ottiene sommando le forze infinitesime agenti su ciascuna striscialina di diga contenuta fra $y = 0$ (superficie acqua) e $y = H$ = fondo dell'acqua. Dunque:

$$\vec{F} = -\vec{i} \left(L \int_0^H (p_0 + \rho g y) \, dy \right) = \left(-p_0 L H - \rho g \frac{H^2}{2} L \right) \vec{i}$$

b) La ~~forza~~ pressione media esercitata dall'acqua è $\bar{p} = \frac{F}{LH}$, cioè

$$\bar{p} = p_0 + \rho g \frac{H^2}{2}$$

c) Lungo l'asse x la diga è anche soggetta ad una forza opposta esercitata dall'atmosfera che è in contatto con la superficie destra della diga. Tale forza è diretta lungo l'asse x nel verso positivo ed è pari a $\vec{F}' = p_0 L H \, \vec{i}$. Dunque, la forza totale agente lungo l'asse x è pari a

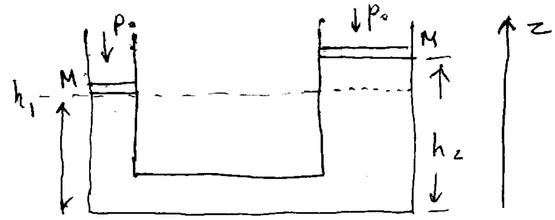
$$\vec{F} + \vec{F}' = -\rho g \frac{H^2}{2} L \, \vec{i}$$

Esercizio 4 Una leva idraulica è costituita da due cilindri verticali di raggi R_1 e R_2 riempiti con un liquido incompressibile di densità ρ con $R_1 < R_2$. Il sistema è in contatto con l'atmosfera. I pistoni presenti nei due cilindri hanno la stessa massa M ~~[illegible]~~.

a) ~~[illegible]~~ Si trovi di quanto differiscono le altezze del liquido h_1 e h_2 nei due cilindri, cioè il valore $\Delta h = h_2 - h_1$, in condizioni di equilibrio.

b) Se si applica una forza F_1 nel cilindro di raggio R_1, si dica come cambia il valore di Δh in condizioni di equilibrio.

Soluzione:



a) In condizioni di equilibrio, le forze totali esercitate sui pistoni di massa M devono essere uguali a zero.

cilindro 1 : $\quad p_1 S_1 - Mg - p_0 S_1 = 0 \quad \Rightarrow p_1 = p_0 + \dfrac{Mg}{S_1} \qquad (1)$

cilindro 2 : $\quad p_2 S_2 - Mg - p_0 S_2 = 0 \quad \Rightarrow p_2 = p_0 + \dfrac{Mg}{S_2} \qquad (2)$

dove $S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi R_2^2$ sono le sezioni dei cilindri, p_0 è la pressione atmosferica e p_1 e p_2 sono le pressioni esercitate dal fluido sulle superfici dei pistoni.

D'altra parte, per il principio dei vasi comunicanti, la pressione p_2 è pari a

$$p_2 = p_1 - \rho g (h_2 - h_1) = p_1 - \rho g \Delta h \qquad (3)$$

Sostituendo nella (3) i valori di p_1 e p_2 dati nella (1) e nella (2) si trova, dopo semplici passaggi:

$$\Delta h = \frac{M}{\rho}\left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}\right) = \frac{M}{\rho}\left(\frac{1}{\pi R_1^2} - \frac{1}{\pi R_2^2}\right) > 0 \qquad (4)$$

b) In questo caso la forza F_1 si aggiunge alla forza $p_0 S_1$ esercitata dall'atmosfera nel cilindro 1, dunque l'eq. (1) va sostituita con

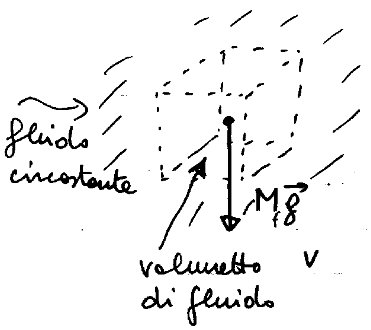
$$p_1 S_1 - Mg - p_0 S_1 - F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S_1} + \frac{F_1}{S_1} \qquad (1')$$

sostituendo il nuovo valore di p_1 insieme a quello di p_2 dato ancora dalla (2) nella (3) si trova

$$\Delta h = \frac{M}{\rho}\left(\frac{1}{\pi R_1^2} - \frac{1}{\pi R_2^2}\right) + \frac{F_1}{\rho g \pi R_1^2} \qquad (5)$$

– L'EQUILIBRIO DEI FLUIDI E IL PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Un fluido si trova in equilibrio meccanico macroscopico se ogni suo volumetto è fermo. Consideriamo, ad esempio, una vaschetta che, ad un dato istante, venga riempita di acqua. In tal caso, si osserva che l'acqua inizialmente si muove ma, dopo un tempo sufficiente, il moto cessa in ogni punto del fluido. Questa condizione corrisponde alla situazione di equilibrio meccanico. Vediamo, ora, quali condizioni devono essere soddisfatte perché il fluido resti in equilibrio. Consideriamo un piccolo volumetto V all'interno del fluido avente massa M_f. Su tale volumetto si esercita la forza peso $\vec{P} = M_f \vec{g}$ diretta verso il basso e la forza $\vec{F}_f$ che il fluido circostante applica sulle pareti del volumetto. Dunque, la forza totale è



$$\vec{F} = M_f \vec{g} + \vec{F}_f \qquad (15)$$

Perché il volumetto si trovi in equilibrio meccanico, cioè fermo, la forza totale $\vec{F}$ deve essere uguale a zero. Ciò significa che

$$\vec{F} = M_f \vec{g} + \vec{F}_f = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_f = -M_f \vec{g} . \qquad (16)$$

Cioè il fluido circostante esercita una forza risultante sulle pareti del volumetto (forza dovuta alla pressione esercitata sulle pareti) che è uguale ed opposta alla forza del volumetto.

La forza che il fluido circostante esercita sul volumetto è, perciò, RIVOLTA DAL BASSO VERSO L'ALTO e PARI IN MODULO AL PESO DEL VOLUMETTO V RIEMPITO DI FLUIDO.

Supponiamo, ora, di sostituire al volumetto V di fluido un volumetto identico ma di un materiale diverso e, quindi, di massa diversa da M_f. Ad esempio, un volumetto di rame o di alluminio. Poiché le superfici di contatto fra il fluido circostante e il nuovo materiale sono rimaste le stesse, la pressione del fluido in ogni punto di queste superfici è rimasta la stessa del caso precedente, dunque anche la forza totale esercitata dal fluido circostante sul corpo di volume V è ancora data da $\vec{F}_f = -M_f\vec{g}$ dove M_f è la massa di un fluido di volume V. Questa forza viene detta FORZA DI ARCHIMEDE e, per tale motivo, la indicheremo con il simbolo $\vec{F}_A$

$$\vec{F}_A = -M_f\vec{g} \qquad (17)$$

La (17) è nota come <u>LEGGE DI ARCHIMEDE</u> secondo cui

"UN CORPO IMMERSO IN UN FLUIDO RICEVE UNA FORZA DIRETTA DAL BASSO VERSO L'ALTO E PARI (IN MODULO) AL PESO DELLA MASSA DEL FLUIDO SPOSTATO DAL CORPO"

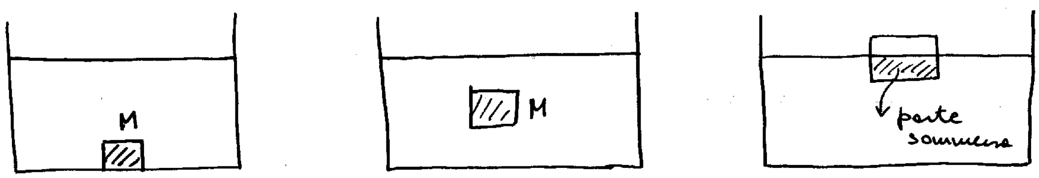
Poiché il corpo è anche soggetto alla forza peso associata con la sua massa M, la forza risultante sul corpo è

$$\vec{F} = M\vec{g} + \vec{F}_A = M\vec{g} - M_f\vec{g} \qquad (18)$$

Dunque, se il corpo ha densità superiore al fluido circostante, $M > M_f$ e la forza risultante è diretta verso il basso. Il corpo, perciò, se lasciato da fermo nel fluido, cade verso il basso con un'accelerazione $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{M} = \frac{M-M_f}{M}\vec{g}$ fino a depositarsi sul fondo del recipiente.

Se il corpo ha densità uguale a quella del fluido circostante, allora $M = M_f$ e, perciò, $\vec{F} = 0$. Dunque, se abbandonato da fermo nel fluido vi rimane indefinitivamente.

Se, infine, il corpo ha densità minore del fluido circostante, cioè se $M < M_f$, il corpo sarà soggetto ad una forza risultante $\vec{F}$ diretta verso l'alto. Una condizione di equilibrio meccanico potrà essere raggiunta solamente quando il corpo avrà raggiunto la superficie del fluido e sarà immerso solo parzialmente nel fluido (vedi fig. c)



a) posizione di equilibrio del corpo di massa M per $M > M_f$

b) posizione di equilibrio del corpo di massa M per $M = M_f$

c) posizione di equilibrio del corpo di massa M per $M < M_f$

Esercizio: Un corpo di densità $\rho = 500 \ kg/m^3$ galleggia sulla superficie di un lago (densità acqua $\rho_a = 1000 \ kg/m^3$). Se $V = 10 \ cm^3$ è il volume del corpo, quale è il volume del corpo sommerso? (vedi figura c).

Soluzione: la forza totale agente sul corpo è

$$\vec{F} = M\vec{g} - M_f\vec{g}$$

dove $M = \rho V =$ massa del corpo e $M_f = \rho_a V_s$ è la massa di acqua spostata dal corpo dove V_s è il volume della parte sommersa del corpo. All'equilibrio deve essere $\vec{F} = 0$, cioè

$$\rho V \vec{g} - \rho_a V_s \vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_s = \frac{V\rho}{\rho_a} = \frac{V}{2} = 5 \ cm^3$$

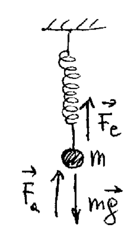
La forza di Archimede ha trovato importanti applicazioni pratiche fra le quali citiamo:

- Mongolfiere e dirigibili. In questo caso un pallone viene riempito o con un gas più leggero dell'aria (ad es. idrogeno) oppure con aria calda (la densità dell'aria si riduce all'aumentare della temperatura). In tali condizioni la forza di Archimede è superiore in modulo alla forza peso del pallone (peso dell'involucro + peso gas interno) e il pallone si solleva.

- Barche, navi, sommergibili. In questo caso, anche se la densità dei materiali con cui è costruita l'imbarcazione può essere superiore a quella dell'acqua, la presenza di grandi spazi vuoti interni riempiti di aria fa sì che la forza di Archimede sia sufficiente a vincere la forza peso complessiva dell'imbarcazione. Di conseguenza, l'imbarcazione galleggia nell'acqua senza affondare.

- Poiché il corpo umano possiede numerose cavità piene di aria (ad esempio i polmoni), la sua densità media è minore di quella dell'acqua. Questo rende possibile galleggiare nell'acqua senza andare a fondo.

- MISURA DI DENSITÀ DI UN LIQUIDO. Si immerge nel liquido di cui si vuol misurare la densità un corpo di massa m nota e volume V noto e si misura la forza totale agente sul corpo con un dinamometro. All'equilibrio



$$\vec{F}_e + \vec{F}_a + m\vec{g} = 0$$

, dove $\vec{F}_e$ = forza elastica ($|\vec{F}_e| = K\Delta x$)
$|\vec{F}_a| = \rho V$ = forza di Archimede

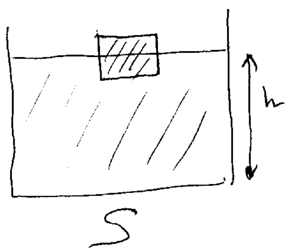
$$\Rightarrow \quad K\Delta x = mg - \rho V g \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{mg - \rho V g}{K} \quad (1)$$

Dunque, misurando l'allungamento Δx si può calcolare la densità $\rho = \frac{\cancel{m}g - K\Delta x}{V}$ (2) del fluido.

Analogamente, immergendo un corpo di massa nota m in un fluido di densità nota (ad esempio acqua), si può calcolare facilmente il volume del corpo riscrivendo la (1) nella forma $V = \frac{-K\Delta x + mg}{\rho}$ (3)

Esercizio 5 Un cubetto di ghiaccio di lato $L = 5$ cm galleggia su un recipiente cilindrico di sezione $S = 100\ cm^2$ nel quale è stato versato un litro di acqua. Facendo l'ipotesi che la densità dell'acqua sia $\rho_a = 1000\ kg/m^3$ mentre quella del ghiaccio sia $\rho_g = 900\ kg/m^3$, si calcoli:

1) L'altezza h della superficie libera dell'acqua rispetto al fondo del recipiente.
2) Si dica di quanto cambia l'altezza quando tutto il ghiaccio si è sciolto e di quanto cambia la pressione nel fondo del recipiente.



1) Poiché il ghiaccio si trova in equilibrio, la forza totale agente su di esso (peso + forza Archimede) deve essere nulla. Dunque

$$\rho_a V_s g = \rho_g L^3 g \Rightarrow V_s = \frac{\rho_g}{\rho_a} L^3 = 112\ cm^3 \quad (1)$$

dove V_s = volume di ghiaccio sommerso.

Dalla figura si deduce che il volume totale occupato dall'acqua e dalla parte sommersa è il volume di un cilindro di superficie S e altezza h. Dunque

$$V_a + V_s = S h \Rightarrow h = \frac{V_a + V_s}{S} = \frac{V_a + \rho_g/\rho_a L^3}{S} = 11.2\ cm \quad (2)$$

2) Quando il ghiaccio si è sciolto esso si trasforma in acqua. Per la conservazione della massa, la massa iniziale di ghiaccio si deve trasformare interamente in massa di acqua, dunque

$$\rho_g L^3 = \rho_a V_a' \Rightarrow V_a' = \frac{\rho_g}{\rho_a} L^3 \quad (3)$$

dove V_a' è il volume di acqua prodotta. Confrontando la (3) con la (1) si vede che $V_a' = V_s$.

La nuova altezza h dell'acqua è

$$h = \frac{V_a + V_a'}{S} = \frac{V_a + V_s}{S} \quad (4)$$

che coincide con l'altezza iniziale. Dunque l'altezza non cambia.

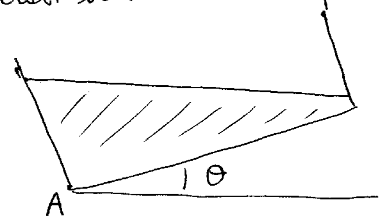
La pressione nel fondo è data da

$$p = p_0 + \rho_a g h \quad (5)$$

poiché h non cambia, anche la pressione non cambia.

Esercizio 6

Un litro di acqua è contenuto in una vaschetta quadrata di lato $L = 10\,cm$.
1) Si calcoli la pressione sul fondo della vaschetta.
Ad un dato istante, la vaschetta viene inclinata di un angolo $\theta = 30°$
2) Si trovi il valore della pressione nel punto A.

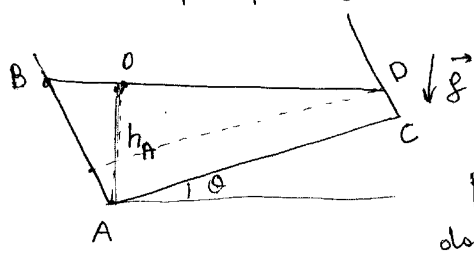


Soluzione: 1) Quando la vaschetta non è inclinata, l'altezza del liquido è

$$h = \frac{V}{L^2} = 10\,cm = 10^{-1}\,m \qquad (1)$$

dove $V = 10^{-3}\,m^3$ è il volume di acqua. Conseguentemente, la pressione è

$$p = p_0 + \rho g h = 102.3\ KPa \qquad (2)$$

2)


Stavolta, la pressione nel punto A è

$$p = p_0 + \rho g h_A \qquad (3)$$

dove h_A è la profondità di A rispetto alla superficie libera orizzontale. (punto A)

Il volume occupato dall'acqua è quello interno alla figura solida che ha come superficie di base il trapezio ABDC e come altezza lo spigolo di lunghezza L. Dunque:

$$V = \frac{AB + CD}{2} L^2 \qquad (4)$$

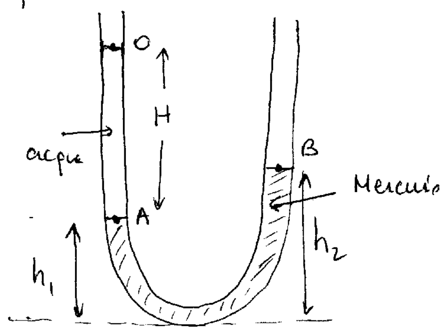
D'altra parte, dalla figura si deduce $(AB - CD) = L\,tg\,\theta$

$\Rightarrow \quad CD = AB - L\,tg\,\theta$ che, sostituito nella (4) fornisce:

$$AB = \frac{V}{L^2} + L\,tg\,\theta = 0.158\ m \qquad (5)$$

l'altezza h in figura è, perciò, $h_A = AB\cos\theta = 0.137\,m$. Dunque, la nuova pressione è $P = p_0 + \rho g h_A = 102.6\ KPa$

Esercizio 7. In un tubo ad U di sezione $S = 1\ cm^2$ è contenuto inizialmente del mercurio (densità $\rho = 13000\ kg/m^3$). Un volume $V = 0,1$ litri di acqua viene versato nel lato sinistro del tubo. Si calcoli la differenza fra le altezze h_1 e h_2 delle due superfici di mercurio (vedi figura)



Soluzione: Per la legge di Stevino, la pressione p_A nel punto A è

$$p_A = p_0 + \rho_a g H \qquad (1)$$

dove $\rho_e = 1000\ kg/m^3$ = densità acqua e H è l'altezza della colonna di acqua.

D'altra parte, il volume occupato dal cilindretto di acqua è

$$V = S H \Rightarrow H = \frac{V}{S} = \frac{10^{-4}}{10^{-4}} = 1\ m \qquad (2)$$

Per la legge di Stevino, le pressioni p_A e p_B nel mercurio devono essere legate dalla relazione (3)

$$p_A = p_B + \rho \cdot g (h_2 - h_1)$$

d'altra parte, il punto B è in contatto con l'atmosfera e, quindi, $p_B = p_0$, (4)

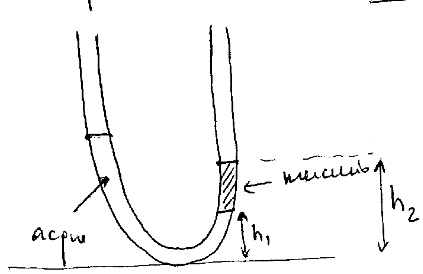
che, sostituito nella (3) fornisce

$$p_A = p_0 + \rho g (h_2 - h_1)$$

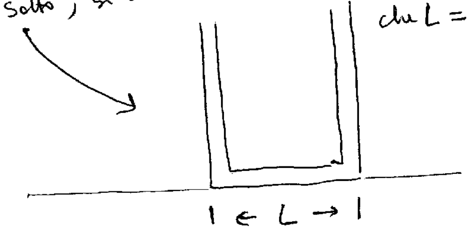
uguagliando la (1) e la (3) si trova (5)

$$\rho g (h_2 - h_1) = \rho_e g H \Rightarrow (h_2 - h_1) = \frac{\rho_e}{\rho} H = 0.9\ m$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE: la soluzione trovata in (5) vale solo se la configurazione di equilibrio è quella mostrata nella figura precedente e ciò è possibile solo se la quantità di mercurio è sufficientemente alta dimodoché $h_2 - h_1$ può essere di 0.9 m. In caso contrario (piccola quantità di mercurio), la configurazione di equilibrio sarà del tipo sotto riportata.



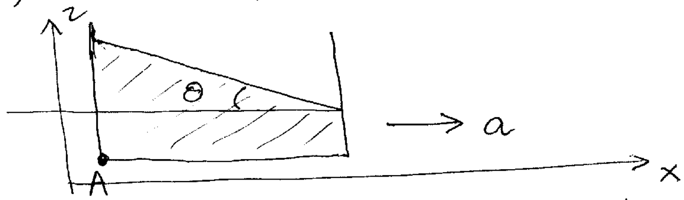
Esercizio proposto: in quest'ultimo caso, supponendo che il tubo abbia la forma mostrata sotto, si trovi il valore di h_1 e di h_2 sapendo che $L = 10$ cm.



Esercizio 8 – Una bacinella quadrata di lato $L = 20$ cm contiene 3 litri di acqua. La bacinella si trova in un carrello che accelera con accelerazione costante $a = 3\ m/s^2$ lungo un asse x orizzontale -

1) Si trovi l'angolo che la superficie dell'acqua forma con l'orizzontale in condizioni di equilibrio (angolo θ in figura)

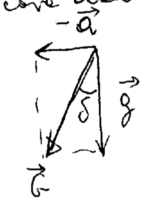
2) Si trovi la pressione nel punto A in condizioni di equilibrio



Soluzione: nel sistema di riferimento solidale con il carrello c'è una forza apparente pari a $-m\vec{a}$ agente su qualunque massa m pesante (ad esempio, m potrebbe essere la massa di una molecola di acqua). Tale forza è, quindi, diretta nel verso opposto all'asse x. La forza totale agente su ciascuna particella di acqua di massa m è, perciò,

$$\vec{F} = -m\vec{a} + m\vec{g} = m(\vec{g} - \vec{a}) \qquad (1)$$

Ma questa è esattamente uguale alla forza esercitata da un campo di gravità apparente pari a $\vec{G} = \vec{g} - \vec{a}$. Dunque, a tutti gli effetti, l'accelerazione del carrello è equivalente alla presenza di un campo di gravità $\vec{G}$ che ha valore maggiore di $\vec{g}$ ($|\vec{G}| = \sqrt{g^2 + a^2} > g$) ed è inclinato rispetto alla normale z di un angolo δ che si ricava dalla figura sotto.



$$\operatorname{tg}\delta = \frac{a}{g} \Rightarrow \delta = \operatorname{arctg}\frac{a}{g} \qquad (2)$$

Ma, come abbiamo visto in precedenza, la superficie di un fluido si deve disporre perpendicolarmente alla gravità e, quindi

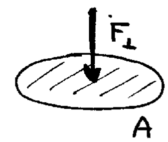
$$\theta = \delta = \operatorname{arctg}\frac{a}{g} = 17^\circ \qquad (3)$$

2) La pressione in A è data dalla legge di Stevino con il nuovo valore $G = \sqrt{g^2 + a^2} = 10.2\ m/s^2$ e con h che rappresenta la distanza del punto A dalla superficie dell'acqua. Per il calcolo di h si devono ripetere i ragionamenti già fatti nell'esercizio 6

Sommario

- Definizione di pressione media $\quad p = \frac{F_\perp}{A}$

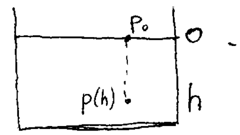
  " Forza normale per unità di superficie "



- Definizione di pressione locale in un punto $\vec{r}$

$$p(\vec{r}) = \lim_{dA \to 0} \frac{dF_\perp(\vec{r})}{dA}$$

- Dipendenza della pressione dalla profondità h in un liquido di densità ρ all'equilibrio.

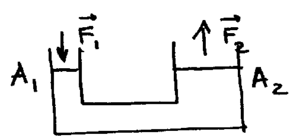


$$p(h) = p_0 + \rho g h$$

p_0 = pressione alla profondità 0.

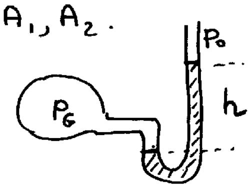
- Il principio dei vasi comunicanti

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$$



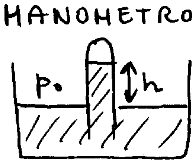
F_1, F_2 = forze sulle superfici di aree A_1, A_2.

- MANOMETRO DIFFERENZIALE A TUBO APERTO



$$p_G - p_0 = \rho g h$$

- MANOMETRO ASSOLUTO (BAROMETRO DI TORRICELLI)



$$p_0 = \rho g h$$

- IL PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

$$\vec{F}_A = - M_f \vec{g}$$

M_f = massa di fluido spostata