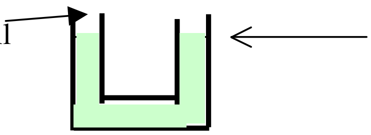
II COMPITINO FISICA GENERALE Ing. Civile-Edile 6/06/2013

Esercizio 1 - Un anello di rame ha massa $m_r = 300$ g e si trova immerso in condizioni di equilibrio termico in un litro di acqua a temperatura $T_a = 18$ °C. In queste condizioni, il raggio interno dell'anello è $r_o = 5$ cm. Una massa di giaccio $m_g = 150$ g che si trova a temperatura $T_g = 0$ °C viene immersa nell'acqua. Supponendo il sistema contenuto in un recipiente isolato termicamente, si trovi la variazione Δr del raggio dell'anello di rame ad equilibrio raggiunto. (calore latente ghiaccio $\lambda = 3.3\ 10^5$ J/Kg, calore specifico rame $c_r = 92$ cal/(Kg K), coefficiente di dilatazione termica volumica del rame $\alpha = 5.1\ 10^{-5}$ (°C)$^{-1}$, calore specifico acqua $c_a = 1000$ cal/(Kg K)).

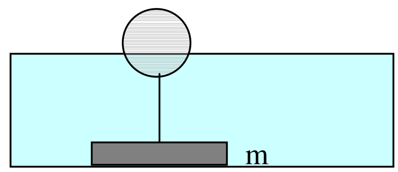
Esercizio 2 - Un tubo ad U aperto di sezione interna $S = 4$ cm^2 è riempito parzialmente con acqua come mostrato in figura. Ad un dato istante, si introduce una massa $m_m = 10$ g di mercurio nel lato sinistro. Si trovi di quanto di solleva il livello dell'acqua nel lato destro rispetto alla posizione iniziale.

dove si mette il mercurio



livello iniziale acqua

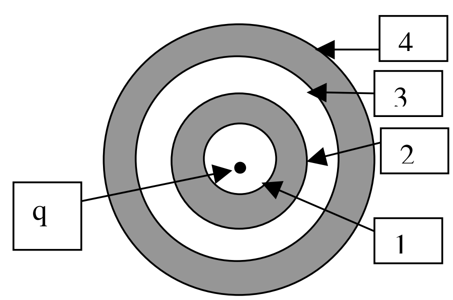
Esercizio 3 - Una boa è costituita da una sfera cava di raggio $r = 40$ cm. Se la boa viene gettata nell'acqua di un lago, una frazione 1/5 del volume totale della boa resta immersa. Per mantenere ferma la boa la si collega con un peso di massa m tramite una fune inestensibile di masa trascurabile come mostrato in figura. La profondità dell'acqua del lago varia apprezzabilmente durante l'anno. Quale è il valore minimo che deve avere la massa m se si vuole che il peso non si sollevi mai da terra qualunque sia l'innalzamento della superficie del lago ?



Esercizio 4 - Una mole di gas perfetto è contenuta in un cilindro chiuso da un pistone mobile di massa trascurabile e sezione $S = 10^2$ cm^2. Il sistema è immerso in un gas esterno mantenuto a pressione costante $p_0 = 10^5$ Pa e temperatura costante $T = 27$°C. Il cilindro e il pistone sono buoni conduttori termici. Ad un dato istante, una massa $m = 20$ kg viene appoggiata sul pistone e si attende il raggiungimento del nuovo equilibrio.
Si dica se la trasformazione è reversibile o irreversibile e si trovi il calore scambiato dal gas interno al pistone con il gas esterno dicendo se è assorbito o ceduto (Si usi il valore $R = 8.31$ J K^{-1} mol^{-1}).

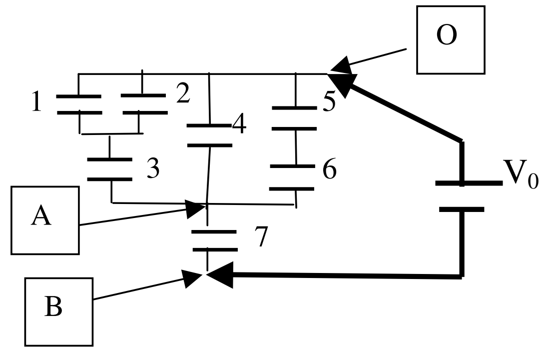
Esercizio 5 – Due sfere conduttrici cave concentriche I e II sono disposte come in figura. La sfera I ha raggio interno $a = 5$ cm e raggio esterno $b = 2a$, quella esterna ha raggio interno $c = 3a$ e raggio esterno $d = 4a$. La sfera I è inizialmente scarica mentre la II ha una carica $Q_{II} = 2$nC. Una carica puntiforme $q = 1$ nC si trova nel centro comune del sistema di sfere. Ad un dato istante, la sfera I viene collegata a terra con un filo conduttore.

5.1- Si trovino i valori delle cariche Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 che si trovano sulle superfici 1, 2, 3 e 4 dopo che è stato raggiunto il nuovo equilibrio.

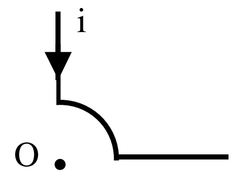


5.2 - Si trovi la carica elettrica Q che fluisce dalla sfera I a terra (valore assoluto e segno) e l'energia dissipata nel filo conduttore nel transitorio successivo al collegamento della sfera a terra.

Esercizio 6- Un sistema è costituito da 7 condensatori 1, 2, ... 7 collegati come in figura. Ad un dato istante un generatore di tensione $V_0 = 1.5$ V viene collegato ai punti *O* e *B* come mostrato in figura. Si trovi la differenza di potenziale V_A-V_B fra i punti *A* e *B* e il lavoro fatto dal generatore per caricare i condensatori. I condensatori hanno tutti la stessa capacità $C = 20$ nF.



Esercizio 7– Calcolare il campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ (modulo, direzione e verso) prodotto nel punto *O* da una corrente $i = 2$ A che scorre nel filo mostrato in figura. Il tratto curvo è circolare di raggio $a = 5$ cm e centro in *O* e i segmenti di filo rettilinei sono perpendicolari l'uno all'altro.



Esercizio 8– Un conduttore cilindrico cavo ha raggio interno $a = 3$ cm, raggio esterno $b = 2a$ e altezza $h = 2$ m. Nel conduttore viene fatta passare una corrente $i = 10$ A distribuita uniformemente che scorre nel verso mostrato in figura (le linee di corrente sono circonferenze concentriche all'asse *z* del cilindro). Si calcoli direzione, verso e modulo del campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ in un punto interno al cilindro di raggio $r = 5$ cm dall'asse *z*.

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es. 1- Il bilancio dei calori assorbiti dall'aqcua, dal ghiaccio e dal rame si scrive:

$$c_a m_a (T - T_a) + c_a m_g (T - 0) + \lambda m_g + c_r m_r (T - T_a) = 0 \qquad (1)$$

dove m_a = 1 Kg è la massa dell'acqua. Dalla (1) si deduce immediatamente la temperatura finale del sistema (si deve fare attenzione a riportare i calori specifici nelle stesse unità)

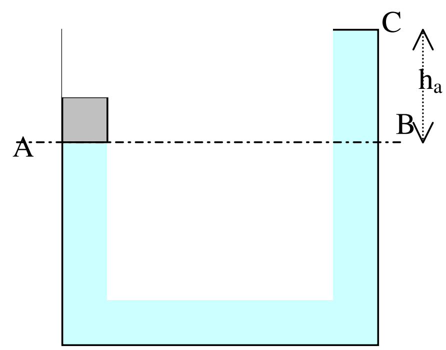
$$T = \frac{c_a m_a T_a + c_r m_r T_a - \lambda m_g}{c_a m_a + c_a m_g + c_r m_r} = 5.66\ °\mathrm{C} \qquad (2)$$

Il coefficiente di dilatazione lineare α_L del rame è $\alpha_L = \alpha/3 = 1.7\ 10^{-5}\ (°\mathrm{C})^{-1}$. Conseguentemente, la variazione del raggio interno dell'anello di rame è:

$$\Delta r = \alpha_L\, r_0\, (T - T_a) = 1.05\ 10^{-5}\ \mathrm{m} = 10.5\ \mu\mathrm{m} \qquad (3)$$

Soluzione Es.2 - La pressione sul punto A sul fondo del mercurio è

$$p(A) = p_0 + \rho_m g h = p_0 + \frac{m_m g}{S} \qquad (1)$$



dove abbiamo indicato con h l'altezza del cilindretto di mercurio. Per il primcipio dei vasi comunicanti, la pressione in A deve essere uguale a quella in B che è pari a $p(B) = p_0 + \rho_a g h_a$ (2)

dove h_a è la differenza fra l'altezza della superficie dell'acqua nel tubo a destra e in quello a sinistra e ρ_a è la densità dell'acqua. Imponendo l'uguaglianza delle pressioni $p(A)$ e $p(B)$, si trova

$$h_a = \frac{m_m}{\rho_a S} = 0.025\ \mathrm{m} = 2.5\ \mathrm{cm} \qquad (3)$$

Per l'incomprimibilità dell'acqua, se l'acqua nel ramo destro si è sollevata di Δh, allora quella nel ramo sinistro si è abbassata di Δh. In totale, la differenza fra i livelli dell'acqua nei due rami è h_a = 2 Δh e, quindi $\Delta_h = h_a/2 = 0.0125\ \mathrm{m} = 1.25\ \mathrm{cm}$ (4)

Soluzione Es. 3 - Il volume sommerso è $V_s = 4\,\pi\, r^3 /(15) = 0.0536\ \mathrm{m}^3$. Dalla legge di Archimede si deduce, perciò, la massa della boa che è pari a

$$m_b = \rho_a V_s = 53.6\ \mathrm{kg} \qquad (1)$$

La massa m si solleva da terra quando la tensione T della corda supera il valore mg. L'equilibrio delle forze agenti sulla boa si scrive:

$$T + m_b g - \rho_a V^*_S\, g = 0 \quad \Rightarrow \quad T = -m_b g + \rho_a V^*_S\, g \qquad (2)$$

dove V^*_S è il volume di acqua spostato quando la corda è collegata alla boa. Dalla (2) si vede che la tensione raggiunge il massimo valore quando il volume spostato e' massimo. Il massimo volume di acqua spostata è pari al volume totale della boa $V_{boa} = 0.268\ \mathrm{m}^3$. Dunque, la tensione massima è $T = -m_b g + \rho_a V_{boa} g = 2.10\ 10^3$ N. La massa m del peso deve , quindi, essere

$$m > T/g = \rho_a V_{boa} - m_b = 214\ \mathrm{Kg} \qquad (3)$$

Soluzione Es.4 - La trasformazione non avviene in modo lento e, quindi, è una trasformazione <u>non reversibile</u>. Poichè la temperatura dell'ambiente esterno è costante, all'equilibrio il sistema riassume la temperatura T_0 = 300 K e, quindi, la variazione di energia è nulla. Per il primo principio della termodinamica,

$$Q + L = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = -L \qquad (1)$$

dove $L = -[p_0 + mg/S]\,(V_f - V_i)$ è il lavoro fatto dall'esterno sul sistema (essendo costante la pressione esercitata dall'atmosfera e dalla massa m) . Ma all'inizio e alla fine il sistema è in equilibrio e soddisfa alla legge dei gas perfetti. Dunque:

$$p_0 V_i = RT_0 \quad \Rightarrow \quad V_i = \frac{RT_0}{p_0} \quad = 2.49\ 10^{-2}\ \mathrm{m}^3 \tag{2}$$

$$\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) V_f = RT_0 \quad \Rightarrow \quad V_f = \frac{RT_0}{p_0 + \frac{mg}{S}} = 2.08\ 10^{-2}\ \mathrm{m}^3 \tag{3}$$

Ma allora

$$Q = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) RT_0 \left[\frac{1}{\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)} - \frac{1}{p_0}\right] = -\frac{RT_0 mg}{p_0 S} = -489\ \mathrm{cal} \tag{4}$$

il segno - indica che il calore è <u>ceduto</u> dal gas interno a quello esterno .

Soluzione Es.5.1 – Data la simmetria sferica, il campo dipende solo dalla distanza radiale r dal centro ed è diretto radialmente mentre le cariche sulle superfici 1- 4 sono distribuite uniformemente. Applicando il teorema di Gauss a due superfici sferiche interne, rispettivamente, al conduttore I e al II si trova:

$Q_1 = -q = -1$ nC (1)

$Q_3 = -Q_2$ (2)

La sfera II è isolata e, quindi, la sua carica è nota e pari a $Q_{II} = Q_3 + Q_4 = 2$ nC da cui si deduce

$$Q_4 = Q_{II} - Q_3 = Q_{II} + Q_2 \tag{3}$$

Dunque, l'unica incognita resta Q_2 che si ottiene imponendo che il potenziale della sfera I sia nullo. Per trovare il potenziale si utilizza prima il teorema di Gauss per calcolare i campi E_1 e E_2 rispettivamente nelle regioni $2a < r < 3a$ e $r > 4a$. Si trova:

$E_1 = Q_2 / (4\pi\varepsilon_0 r^2)$ e $E_2 = (Q_{II} + Q_2) / (4\pi\varepsilon_0 r^2)$ (4)

da cui si deduce $V_I = \int_{2a}^{3a} E_1 dr + \int_{4a}^{\infty} E_2 dr = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6a} + \frac{Q_{II} + Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4a}$. Imponendo cla condizione $V_I = 0$

si trova $Q_2 = -3\, Q_{II}/5 = -1.2$ nC (5)

Dunque: $Q_1 = -1$ nC , $Q_2 = -1.2$ nC, $Q_3 = 1.2$ nC , $Q_4 = 0.8$ nC (6)

5.2- Per trovare quanta carica va da terra al conduttore I basta fare la differenza fra la carica totale presente alla fine sul conduttore che è $Q_I = Q_1 + Q_2 = -2.2$ nC e quella inizialmente presente che era zero per ipotesi. Dunque, la carica negativa $Q_I = -2.2$ nC va sul conduttore I da terra. Perciò una carica opposta e <u>positiva</u> Q = 2.2 nC va dal conduttore verso terra.

L'energia dissipata sarà pari alla differenza fra l'energia elettrostatica presente inizialmente E_{in} e quella finale E_{fin}. L'energia del sistema di due conduttori è data dalla formula generale

$E = Q_I V_I /2 + Q_{II} V_{II}/2$ (7)

Inizialmente $Q_I = 0$ mentre alla fine $V_I = 0$, dunque il primo termine nella (7) è sempre nullo.
$Q_{II} = 2$ nC sempre, l'unica cosa che cambia è V_{II}. La differenza fra l'energia iniziale e finale è, quindi:

$E_{diss} = E_{in} - E_{fin} = Q_{II}\ (V_{II\,in} - V_{II\,fin})/2$ (8)

Per calcolare V_{IIin} e V_{IIfin} basta conoscere il campo E_2 nella regione $r > 4$a all'inizio e alla fine. Alla fine il campo E_2 è quello in eq.(4). Dunque il potenziale del conduttore II alla fine è:

$$V_{IIfin} = \int_{4a}^{\infty} E_2 dr = \frac{Q_{II} + Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4a} = 36\ \mathrm{V} \tag{9}$$

Applicando Gauss ad una superficie di Gauss di raggio $r > 4a$ nel caso iniziale, si trova il campo

$E_2 = (Q_{int})/(4\pi\varepsilon_0 r^2) = (Q_{II} + q)/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ (10)

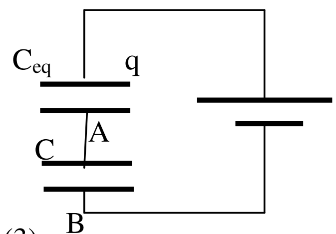
che dà un potenziale

$$V_{IIin} = \int_{4a}^{\infty} E_2 dr = \frac{Q_{II}+q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4a} = 135 \text{ V} \qquad (11)$$

sostituendo questi potenziali insieme a QII = 2 nC nella (8) si trova E_{diss} = 99 nJ.

Soluzione Es.6 - Conviene semplificare il circuito sostituendo agli elementi in serie e in parallelo i condensatori equivalenti. la coppia 1 e 2 è in parallelo e può essere sostituita con un condensatore di capacità equivalente $C_{1eq} = 2\ C$. Il nuovo condensatore è in serie con il 3 e, quindi tutto il sistema 1,2 e 3 si sostituisce con $C_{3eq} = 1/(1/2C+1/C)= 2\ C/3$. Analogamente, 5 e 6 sono in serie e possono essere sostituiti con un'unico condensatore di capacità $C_{5eq} = C/2$. I condensatori di capacità $2\ C/3$ e $C/2$ sono in parallelo al condensatore 4 di capacità C, dunque possono essere sostituiti con un unico condensatore equivalente di capacità

$$C_{eq} = C/2 + 2C/3 + C = 13\ C/6 = 43.33 \text{ nF} \qquad (1)$$



come mostrato in figura. Applicando la legge delle maglie al circuito in figura si scrive: $q/C_{eq} + q/C = V_0$ la cui soluzione è:

$$q = \frac{V_0}{\frac{1}{C_{eq}}+\frac{1}{C}} = \frac{13}{19} C V_0 = 20.5 \text{ nC} \qquad (2)$$

dunque: $V_A - V_B = q/C = 13\ V_0/19 = 1.025$ V (3)

Per caricare i condensatori, una carica pari a q ha attraversato il generatore dal polo negativo a quello positivo e, quindi, il generatore ha compiuto un lavoro

$$L = q\ V_0 = 30.8 \text{ nJ} \qquad (4)$$

Soluzione Es.7. – Il campo prodotto da un elemento di filo di lunghezza dl è dato dalla formula di Laplace:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \qquad (1)$$

Per ogni elemento sui fili rettilinei $d\vec{l}$ e $\vec{r}$ sono paralleli e, quindi, il prodotto vettoriale in eq.(1) è nullo. Ne consegue che il campo in O è prodotto solo dal tratto circolare di filo. Dalla (1) si deduce che il campo è diretto perpendicolarmente al piano della figura entrante nel piano della figura. Se indichiamo con z l'asse entrante nel piano di figura, la componente z del campo è:

$$B_z = \int dB_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}\int dl = \frac{\mu_0 i}{8a} = 6.28\ 10^{-6} \text{ T} \qquad (2)$$

Soluzione Es. 8 - La simmetria del problema è la stessa del solenoide. Dunque, il campo è diretto lungo l'asse del cilindro e il suo valore può dipendere solo dalla distanza r dall'asse.Per la regola della mano destra si vede che il campo di induzione magnetica deve essere diretto in verso opposto all'asse z di figura. Il campo generato da questo sistema è equivalente a quello generato da una sovrapposizione di solenoidi concentrici con raggi compresi fra a e $2a$. Ma, siccome ogni solenoide genera un campo nullo all'esterno, allora anche il campo risultante deve essere nullo per $r > 2a$. Per trovare il campo nel punto P a distanza r dall'asse , si usa il teorema di Ampère utilizzando un percorso rettangolare con un lato lungo h passante per P e parallelo all'asse z e l'altro lato lungo ancora parallelo a z ma posto all'esterno del cilindro ($r > 4a$) dove il campo è nullo. Siccome sappiamo che il campo è diretto in verso opposto all'asse z ci conviene fare la circuitazione nel verso del campo in modo da lavorare con grandezze positive ed ottenere il modulo del campo. Dal teorema di Ampère si trova:

$$B = \mu_0\ i_{conc}/h \qquad (1)$$

dove i_{conc} è la corrente concatenata con il percorso rettangolare. La superficie del circuito rettangolare che è attraversata da corrente è la superficie concatenata

$S_{conc} = h\ (2a-r)$ (2)

mentre la superficie attraversata dalla corrente totale i è $S = h\ (2a - a) = ha$ (3)

Dunque, la corrente concatenata è $i_{conc} = i\ S_{conc}/S = i\ (2a-r)/a = 3.33$ A

che, sostituito nella (1) dà: $B = 2.09\ 10^{-6}$ T