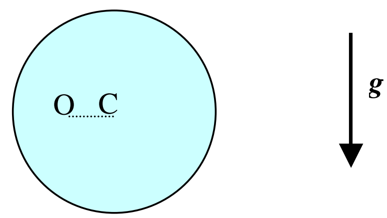
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE, CIVILE-AMBIENTALE , e EDILE. 4 Luglio 2013
Civile-Ambientale-Edile: Fisica Generale I 011BB[testi 1,2,3,4]
Edili : Fisica Generale (BB053 e 053 BB) [testi 1,2,3,4]
Civili : Fisica Generale I 011BB [testi 1,2,3,5], Civili : Fisica Generale BB054 [testi 1,2,4,6]

Esercizio 1: Un disco di raggio R = 5 cm ha una massa per unità di superficie distribuita secondo la legge $\sigma = a\,r + b$ dove r è la distanza dal centro, a e b sono coefficienti costanti di valore a = 200 Kg/m^3 e b = 3 Kg/m^2.



1.1 - Si trovi la massa M del disco e il momento di inerzia I del disco rispetto ad un asse perpendicolare al disco e passante per il centro di massa C del disco.

Al tempo t = 0 il disco si trova fermo nella posizione in figura e può ruotare liberamente attorno ad un asse perpendicolare al piano della figura e passante per il punto O a distanza R/2 dal centro di massa C (il segmento OC è inizialmente orizzontale).

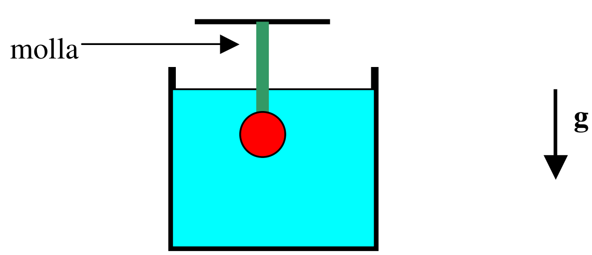
1.2 - Si trovi l'accelerazione angolare del disco (modulo, direzione e verso) al tempo t = 0 e la massima velocità angolare raggiunta dal disco nel moto successivo.

Esercizio 2 : Nel modello di Rutherford dell'atomo di idrogeno, un elettrone con carica elettrica $-e = -1.6 \times 10^{-19}$ C e massa $m = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg ruota attorno al protone che ha carica e su un'orbita circolare di raggio r con velocità angolare costante. Si assuma il protone fermo.

2.1 - Supponendo che il periodo di rotazione di un'elettrone sia pari a $T = 4 \times 10^{-15}$ s, si trovi il raggio dell'orbita circolare dell'elettrone.

2.2 - Si dimostri che l'energia meccanica dell'elettrone è esattamente la metà dell'energia potenziale e se ne calcoli il valore.

Esercizio 3 (**NON PER I CIVILI DI FISICA GENERALE**)- Un corpo di massa M = 300 g è attaccato ad una molla di costante elastica K = 8 N/m ed è immerso in un recipiente di massa m = 150 g contenente 1 litro di acqua come mostrato schematicamente in figura. In queste condizioni si osserva che la molla si è allungata di Δx = 14 cm rispetto alla sua posizione di riposo.



3.1- Si determini la densità ρ del corpo.

Per poter mantenere ferma la bacinella si deve applicare una forza $\boldsymbol{F}$ su di essa in verso opposto alla gravità. Ad un dato istante la molla si spezza e il corpo cade sul fondo fermandosi.

3.2- Si trovi di quanto varia il valore della forza necessaria per tener ferma la bacinella.

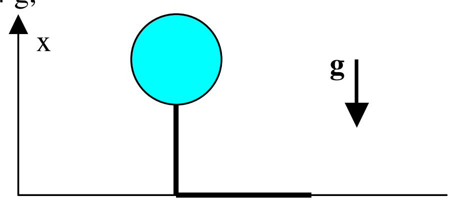
Esercizio 4 (NON PER I CIVILI DI FISICA GENERALE I !!): Il campo elettrico di una distribuzione di carica a simmetria sferica confinata in una sfera di raggio R = 2 m è diretto radialmente (rispetto al centro della distribuzione sferica) nel verso positivo ed ha valore $E(r) = a\, r^3$ pe $r < R$,dove a è un coefficiente costante pari ad a = 500 V/m^4.

4.1 - Si trovi il valore della carica elettrica totale presente nella sfera di raggio R e quello della carica presente nello spazio fra $R/2$ e R.

4.2 - Si trovi il campo elettrico presente all'esterno della sfera in funzione della distanza r dal centro e si calcoli il lavoro L che deve fare un operatore per portare una carica puntiforme q = 2 μC al centro della distribuzione.

Esercizio 5 (SOLO PER CIVILI DI FISICA GENERALE I).

Un palloncino ha raggio r = 10 cm e massa m = 20 g ed è riempito di Elio ed immerso in aria. Al palloncino è collegato un filo che ha massa per unità di lunghezza pari a λ = 1 g/m. Se il palloncino viene lasciato libero, esso comincia a sollevarsi finchè la parte di corda non appoggiata a terra raggiunge un'altezza h = 2 m. Sapendo che la densità dell'aria è ρ_a = 1.2 Kg /m^3 e che la massa molare dell'Elio è M_M = 4 g,



5.1- Si trovi la densità ρ dell'Elio e il numero n di moli di Elio presenti.

Ad un dato istante, il filo viene tirato verso il basso per un piccolo tratto Δx = 1 cm.

5.2- Si mostri che la forza risultante agente sul palloncino è una forza elastica e si calcoli il valore della costante elastica K.

Esercizio 6 (SOLO PER STUDENTI CIVILI DI FISICA GENERALE)

Un sistema è costituito da due conduttori cilindrici coassiali di lunghezza L = 20 cm. Il conduttore interno ha raggio $R_1 = R$ = 0.5 mm mentre quello esterno ha raggio interno $R_2 = 2\,R$ e $R_3 = 3\,R$. Il conduttore interno ha inizialmente una carica eletrica Q = 16 pC mentre quello esterno è elettricamente scarico. Il conduttore interno e quello esterno vengono, poi, collegati rispettivamente con il polo positivo e quello negativo di una batteria che fornisce una f.e.m. V = 5 V. Dopodichè la batteria viene disconnessa.

6.1 - Si trovino i campi elettrici $\boldsymbol{E}(P)$ e $\boldsymbol{E}(Q)$ presenti nei punti P e Q rispettivamente a distanza $r = 3\,R/2$ e $r = 4R$ dall'asse.

6.2 - Il sistema dei due conduttori cilindrici viene messo in moto con velocità v = 30 m/s in direzione parallela all'asse. Si trovino i campi di induzione magnetica $\boldsymbol{B}(P)$ e $\boldsymbol{B}(Q)$ che si generano nei punti P e Q.

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1-

1.1- Data la simmetria, il centro di massa C si trova nel centro del disco. Per trovare la massa M e il momento di inerzia I rispetto a C, si suddivide il disco in anellini concentrici di spessore infinitesimo dr e raggio r con r compreso fra 0 e R. La massa di ciascun anellino è:

$$dM = \sigma 2\pi r\, dr = a\, 2\pi r^2\, dr + b\, 2\pi r\, dr \qquad (1)$$

dunque, la massa totale è:

$$M = \int dM = \int_0^R 2\pi a r^2 dr + \int_0^R 2\pi b r dr = \frac{2\pi a R^3}{3} + \frac{2\pi b R^2}{2} = 7.59\ 10^{-2}\ \text{Kg} = 75.9\ \text{g} \qquad (2)$$

Il momento di inerzia di ciascun anellino è $dI = dM\, r^2$, dunque, il momento di inerzia totale è:

$$I = \int dI = \int_0^R 2\pi a r^4 dr + \int_0^R 2\pi b r^3 dr = \frac{2\pi a R^5}{5} + \frac{2\pi b R^4}{4} = 1.08\ 10^{-4}\ \text{Kg m}^2 \qquad (3)$$

1.2- Il disco ruota attorno all'asse passante per O, quindi, il momento di inerzia coinvolto è quello rispetto a tale asse che si ottiene applicando il teorema degli assi paralleli.

$$I_O = I + \frac{MR^2}{4} = 1.\ 55\ 10^{-4}\ \text{Kg m}^2 \qquad (4)$$

La forza peso è applicata nel centro del disco e, quindi, il momento della forza peso rispetto al punto O è pari in modulo a $\Gamma = MgR/2 = 1.86\ 10^{-2}$ N m (5)

Per la seconda equazione Cardinale , il modulo dell'accelerazione angolare è

$$\alpha = \Gamma / I_O = 120\ \text{rad /s}^2 \qquad (6)$$

Il vettore velocità angolare ω è perpendicolare alla figura ed entrante. La velocità angolare massima viene raggiunta quando il centro di massa raggiunge il punto più basso quando si è spostato di $R/2$ in basso. Applicando la conservazione dell'energia si trova:

$$\frac{MgR}{2} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{MgR}{I_O}} = 15.5\ \text{rad/s} \qquad (7)$$

Soluzione Esercizio 2.

2.1 -L'unica forza agente sull'elettrone è la forza di Coulomb mentre l'accelerazione dell'elettrone è l'accelerazione centripeta. Dunque, la II legge di Newton si scrive:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2} r \qquad (1)$$

da cui si deduce: $r = \sqrt[3]{\dfrac{e^2 T^2}{16\pi^3 \varepsilon_0 m}} = 4.68\ 10^{-10}$ m (2)

2.2 - L'energia potenziale dell'elettrone è $U = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (3)

L'energia cinetica è pari a

$$K = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \qquad (4)$$

ma dalla (1) si deduce $\dfrac{1}{2} m\omega^2 r^2 = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = -\dfrac{U}{2}$ (5)

Ma allora , l'energia meccanica è $E = U + K = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{U}{2}$ (6)

Sostituendo nella (6) il valore di r trovato nella (2) si ottiene: $E = -\ 2.46\ 10^{-19}$ J = - 1.54 eV (7)

SOLUZIONE ESERCIZIO 3:

3.1 - L'equilibrio delle forze agenti sul corpo si scrive:

$$Mg = K\Delta x + \rho_a gV \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{Mg - K\Delta x}{\rho_a g} = 0.186\ 10^{-3}\ \text{m}^3 \tag{1}$$

la densità del corpo è, quindi,

$$\rho = \frac{M}{V} = 1.62\ 10^3\ \text{Kg/m}^3 \tag{2}$$

3.2- Prima che la molla si spezzasse, l'equilibrio delle forze agenti sul sistema recipiente-acqua-corpo si scriveva:

$$F_0 + K\Delta x - Mg - mg - M_a g + \rho_a gV = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_0 = -K\Delta x + Mg + mg + M_a g - \rho_a gV \tag{3}$$

Dove F_0 è la forza che deve essere applicata sul recipiente per tenerlo fermo e M_a è la massa di acqua. Alla fine si ha, invece:

$$F_1 = +Mg + mg + M_a g - \rho_a gV \tag{4}$$

Dunque la forza applicata cambia di una quantità pari a

$$F_1 - F_0 = K\Delta x = 1.12\ \text{N} \tag{5}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4 -

4.1- La carica totale presente nella sfera di raggio R si trova applicando il teorema di Gauss ad una superficie di raggio R.

$$E(R)4\pi R^2 = \frac{Q(R)}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad Q(R) = a\varepsilon_0 4\pi R^5 = 1.78\ 10^{-6}\ \text{C} = 1.78\ \mu\text{C} \tag{1}$$

La carica ΔQ presente nello spazio fra $R/2$ e R è la differenza fra la carica totale di eq.(1) e la carica interna alla sfera di raggio $R/2$ che, per il teorema di Gauss, soddisfa la relazione:

$$E(R/2)\pi R^2 = \frac{Q(R/2)}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad Q(R/2) = \frac{a\varepsilon_0 \pi R^5}{8} = 0.055\ 10^{-6}\ \text{C} = 0.055\ \mu\text{C} \tag{2}$$

Dunque, $\Delta Q = 31\dfrac{a\varepsilon_0 \pi R^5}{8} = 1.72\ \ 10^{-6}\ \text{C} = 1.72\ \mu\text{C}$

4.2 - Il campo all'esterno si ottiene applicando il Teorema di Gauss ad una superficie sferica di raggio $r > R$. Poichè la carica $Q(R)$ è presente solo nello spazio interno alla sfera, il campo elettrico è radiale e ha componente radiale pari a:

$$E(r) = \frac{Q(R)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{aR^5}{r^2} \tag{3}$$

Il lavoro fatto per portare la carica q è pari all'energia della carica nel punto O al centro della sfera:

$$L = qV(O) = q\left[\int_0^R ar^3 dr + \int_R^\infty \frac{aR^5}{r^2} dr\right] = \frac{5qaR^4}{4} = 2.00\ 10^{-2}\ \text{J} \tag{4}$$

SOLUZIONE Esercizio 5.

5.1 - All'equilibrio, la forza totale agente sul sistema palloncino-filo deve annullarsi, cioè:

$$\rho_a gV - \rho gV - \lambda hg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \rho_a - \frac{\lambda h}{V} = \rho_a - \frac{3\lambda h}{4\pi r^3} = 0.72\ \text{Kg/m}^3 \tag{1}$$

La massa totale dell'Elio è $\qquad M = \rho\, V = 3.02\ 10^{-3}$ Kg (2)

Il numero di moli è: $\qquad n = M/M_M = 0.76$ moli (3)

5.2 - Quando la cordicella viene abbassata di Δx, la forza totale nel verso positivo dell'asse x diventa:

$$F = \rho_a gV - \rho gV - \lambda hg + \lambda \Delta x g \tag{4}$$

Ma i primi due termini nel membro a sinistra si annullano (vedi eq.(1)), dunque

$$F = \lambda g \Delta x \qquad (5)$$

La forza (5) è proporzionale allo spostamento ed è diretta nel verso positivo dell'asse x, cioè tende a riportare il palloncino nella posizione iniziale di equilibrio. Dunque la forza è una forza elastica con costante elastica $K = \lambda g = 9.8\ 10^{-3}$ Nm (6)

Soluzione Esercizio 6 -

6.1- Le cariche elettriche q_1, q_2 e q_3 si accumulano sulle superfici $r = R$, $r = 2R$ e $r = 3R$. Applicando il teorema di Gauss ad una superficie chiusa interna al conduttore esterno si trova

$$q_2 = -\, q_1 \qquad (1)$$

Per la conservazione della carica $q_1 + q_2 + q_3 = Q$ che, unita alla (1) fornisce

$$q_3 = Q = 16 \text{ pC} \qquad (2)$$

L'unica incognita rimasta è q_1 che si ottiene imponendo che la d.d.p. fra il conduttore interno e quello esterno sia pari a V. Applicando Gauss, si trovano i campi presenti nello spazio interno fra i conduttori e quello esterno:

$$E_{\text{int}}(r) = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0 Lr} \quad \text{e} \quad E_{est}(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 Lr} \qquad (3)$$

La differenza di potenziale fra la superficie interna e quella esterna è:

$$V = \int_R^{2R} \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0 Lr} dr = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln 2 \qquad \Rightarrow \qquad q_1 = 2\pi\varepsilon_0 LV \ln 2 = 38.6 \text{ pC} \qquad (4)$$

e, quindi, anche $q_2 = -\ 38.6$ pC. Sostituendo nelle espressioni dei campi in eq.(3) si ottiene

$$E_{\text{int}}(P) = \frac{q_1}{3\pi\varepsilon_0 LR} = 4.62\ 10^3 \text{ V/m} \quad \text{e} \quad E_{est}(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 LR} = 0.72\ 10^3 \text{ V/m} \qquad (5)$$

6.2- Le cariche superficiali q_1, q_2 e Q presenti sulle superfici si muovono con velocità v e sono equivalenti a correnti elettriche superficiali. Poichè in un tempo Δt le cariche si spostano di $v\Delta t$, tutte le cariche presenti su una porzione di cilindro di lunghezza $v\Delta t$ attraversano la sezione del cilindro nel tempo Δt. Ma le cariche presenti su tali sezioni di cilindro sono $\Delta q_1 = q_1\ v\ \Delta t/L$, $\Delta q_2 = -\ \Delta q_1$ e $\Delta q_3 = Q\ v\ \Delta t/L$. Dunque, le correnti i_1, $i_2 = -\ i_1$ e i_3 sono date da:

$$i_1 = \Delta q_1/\Delta t = q_1 v/L = -\ i_2 \quad \text{e} \quad i_3 = \Delta Q/\Delta t = Qv/L \qquad (6)$$

Data la simmetria cilindrica le linee di campo magnetico sono circonferenze concentriche e il campo dipende solamente dalla distanza dall'asse, Applicando il teorema di Ampère si trova:

$$B(P) = \mu_0 \frac{i_1}{3\pi R} = \mu_0 \frac{q_1 v}{3\pi RL} = 1.54\ 10^{-12} \text{ T} \qquad (7)$$

$$B(Q) = \mu_0 \frac{i_3}{8\pi R} = \mu_0 \frac{Qv}{8\pi RL} = 2.4\ 10^{-13} \text{ T} \qquad (8)$$