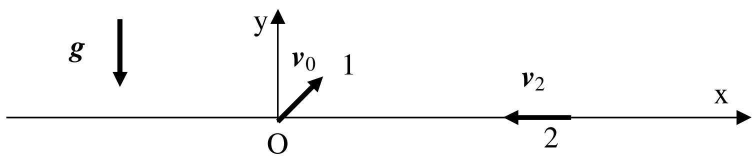
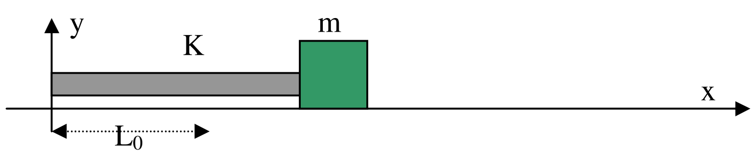
I COMPITINO FISICA GENERALE Ing. Civile-Edile 28/02/2014

Esercizio 1 - Due automobili viaggiano con velocità v_0 = 30 m/s lungo una strada rettilinea in verso opposto sulla stessa corsia. All'istante t = 0 le auto si trovano a distanza d = 70 m e iniziano a frenare con il modulo della velocità che varia secondo la legge $v = v_0\ (1 - \beta t^3)$ dove β è un coefficiente costante. Si dica se il moto delle auto è uniformemente accelerato e si calcoli per quali valori di β le due auto non si urtano (si metta la corretta unità di misura di β).

Esercizio 2 - Al tempo t = 0 un fucile spara un proiettile (1in figura) ad un angolo θ = 30° con l'orizzontale (asse x in figura) nel piano verticale xOy. Al tempo t = 0 un bersaglio (2 in figura) si trova sull'asse x a distanza d = 500 m dal fucile e si avvicina al fucile lungo l'asse x con velocità v_2 = 30 m/s. Sapendo che il proiettile colpisce il bersaglio, si trovi la velocità v_0 di uscita del proiettile.



Esercizio 3 - Una molla di costante elastica K = 100 N/m e lunghezza a riposo L_0 = 30 cm è collegata ad un corpo di massa m = 200 g appoggiato su un piano orizzontale senza attrito. La molla è inizialmente allungata alla lunghezza $L_i = 3L_0/2$ = 45 cm. All'istante t = 0 la molla viene lasciata libera.

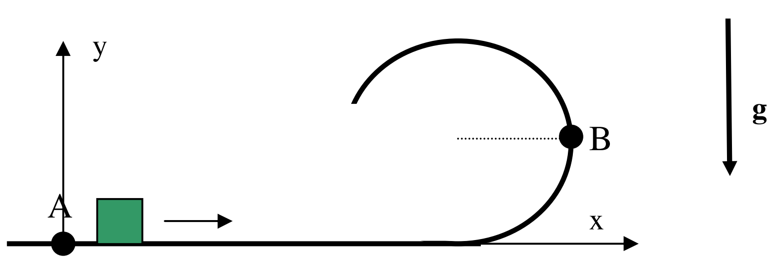


3.1 - Si trovi a quale istante di tempo t la molla raggiunge per la prima volta la lunghezza $L = L_f$ = 20 cm.

3.2 - Si trovi la velocità (modulo, direzione e verso) della massa quando la molla raggiunge la lunghezza L_f.

Esercizio 4 - Un corpo di massa m = 500 g è appoggiato senza attrito su una guida rettilinea allineata lungo un asse x. La guida termina con una parte di forma circolare con raggio r = 30 cm. Il corpo si trova inizialmente nel punto A e viene lanciato con velocità v_0 = 3 m/s come mostrato in figura.
4.1 - Si trovi la velocità del corpo nel punto B e le componenti x ed y dell'impulso $\boldsymbol{I}$ della forza totale esercitata sul corpo nell'intervallo di tempo in cui il corpo passa da A a B.

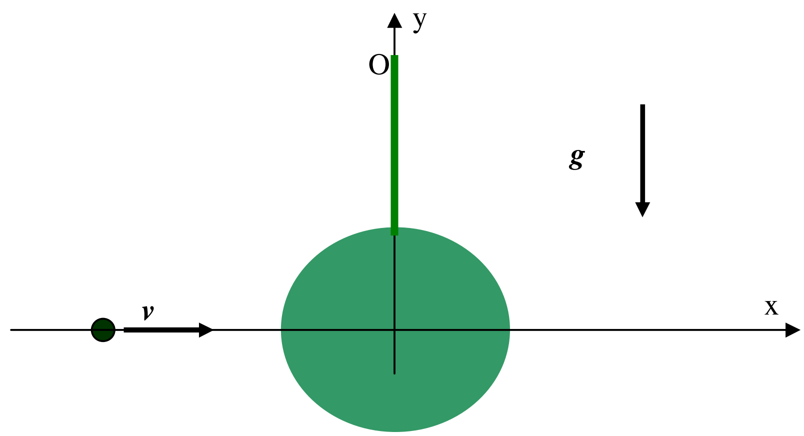
4.2 - Si calcolino le componenti x ed y della reazione vincolare R esercitata dalla guida quando il corpo si trova nel punto A e nel punto B.



Esercizio 5 – Un'asta di massa m= 300 g, lunghezza L = 50 cm e sezione trascurabile è collegata ad una sfera di massa m e raggio r = 30 cm come mostrato in figura. L'asta è vincolata a ruotare senza attrito attorno ad un asse z orizzontale passante per il suo estremo O (l'asse z è perpendicolare al piano della figura). Il sistema è immerso nel campo di gravità $\boldsymbol{g}$ e si trova inizialmente nella posizione mostrata in figura. Un proiettile di massa m si muove lungo l'asse x passante per il centro della sfera e urta la sfera con velocità v_0 = 10 m/s conficcandosi in essa fino al centro della sfera.

5.1 - Calcolare la velocità angolare ω del sistema dopo l'urto quando raggiunge la posizione di massima altezza.

5.2 - Calcolare la forza di reazione esercitata dall'asse passante per O all'istante immediatamente successivo all'urto con il proiettile.



ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es. 1- L'accelerazione è la derivata prima della velocità che è pari ad $a = -3\beta t^2$ che dipende dal tempo t, dunque il moto non è uniformemente accelerato. Poichè le auto viaggiano con la stessa velocità ad ogni istante, esse percorrono lo stesso spazio nello stesso tempo, quindi non si urtano solo se la distanza da loro percorsa prima di fermarsi è pari a d/2. Le auto si fermano quando la loro velocità $v = v_0\,(1 - \beta t^3)$ diventa nulla cioè al tempo:

$$t = \frac{1}{\beta^{\frac{1}{3}}} \qquad (1)$$

In questo tempo lo spazio percorso da ciascuna automobile è:

$$s = \int_0^{\frac{1}{\beta^{\frac{1}{3}}}} v_0\left(1 - \beta t^3\right)dt = v_0 t - v_0 \beta \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^{\frac{1}{\beta^{\frac{1}{3}}}} = \frac{3v_0}{4\beta^{\frac{1}{3}}} \qquad (2)$$

Imponendo la condizione $s < d/2$, si ottiene;

$$\beta > \frac{27v_0^3}{8d^3} = 2.66\ 10^{-1}\ \mathrm{s}^{-3} \qquad (3)$$

Soluzione Es.2 - -Le leggi orarie del proiettile 1 e del bersaglio 2 sono

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v_0 \cos\theta\, t = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0\, t \\ y_1(t) &= v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_0}{2}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= d - v_2 t \\ y_2(t) &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

I proiettile colpisce il bersaglio se $x_1(t) = x_2(t)$ e $y_1(t) = y_2(t)$.ad uno stesso istante t. Imponendo $y_1(t) = y_2(t)$, si trova l'istante a cui avviene l'urto (la soluzione t =0 va, ovviamente, scartata):

$$t = \frac{v_0}{g} \qquad (3)$$

che, sostituito nell'equazione $x_1(t) = x_2(t)$ fornisce

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v_0^2}{g} = d - \frac{v_2 v_0}{g} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v_0^2}{g} + \frac{v_2 v_0}{g} - d = 0 \qquad (4)$$

Questa è un'equazione di II grado nell'incognita v_0. Ricordando che v_0 rappresenta il modulo della velocità che deve essere positivo, l'unica soluzione accettabile è quella con $v_0 > 0$ che è:

$$v_0 = \frac{-v_2 + \sqrt{v_2^2 + 2\sqrt{3}dg}}{\sqrt{3}} = 59.9\ \mathrm{m/s} \qquad (5)$$

Soluzione Es. 3 -

3.1 - Il moto del corpo è un moto armonico attorno alla posizione di equilibrio $L = L_0$ con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ = 22.4 rad/s . Dunque, l'allungamento della molla è

$$L = L_0 + A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1)$$

dove A e φ si ottengono imponendo che al tempo t =0 $L = 3L_0/2$ e $v = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t = 0$, cioè:

$$\frac{3}{2}L_0 = L_0 + A\cos(\varphi) \qquad (2)$$

e

$$v = -A\omega \sin(\varphi) = 0 \qquad (3)$$

che sono risolte per $\varphi = 0$ e $A = L_0/2$ $\Rightarrow$ $L = L_0 + \frac{L_0}{2}\cos(\omega t)$ (4)

Il tempo t si ottiene imponendo che valga la condizione $L = L_f = 0.2$ m , cioè;

$$L_f = L_0 + \frac{L_0}{2}\cos(\omega t) \qquad \Rightarrow \qquad \cos(\omega t) = 2\frac{L_f - L_0}{L_0} = -0.666 \qquad (5)$$

da cui si deduce $t = \frac{\arccos(2\frac{L_f - L_0}{L_0})}{\omega}$ = 103 ms (6)

<u>dove si deve fare attenzione a calcolare l'arcocoseno in radianti !!</u>

3.2 - La velocità della massa ad un generico istante si ottiene derivando la (4) rispetto al tempo:

$$v = -\omega\frac{L_0}{2}\sin\omega t \qquad (7)$$

Utilizzando il valore di ωt dato dalla (6) (ωt = 2.29 rad) si ottiene

v = - 2.50 m/s. (8)

dove il segno - indica che la velocità è diretta nel verso delle x negative.

<u>Soluzione alternativa</u>: Si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica fra l'istante iniziale e quello finale:

$$\frac{1}{2}K(L_i - L_0)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K(L_f - L_0)^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{K}{m}\sqrt{\left[(L_i - L_0)^2 - (L_f - L_0)^2\right]} = 2.50 \text{ m/s} \quad (9)$$

Soluzione Esercizio 4

.4.1 - Si applica la conservazione dell'energia meccanica :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgr + \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{v_0^2 - 2gr} = 1.76 \text{ m/s} \qquad (1)$$

L'impulso della forza è $\boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0$ (2)

dove $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{v}$ sono i vettori velocità in A e in B diretti, rispettivamente, lungo x e lungo y che si scrivono: $\boldsymbol{v}_0 = (v_0 , 0)$ e $\boldsymbol{v} = (0, v)$. Sostituendo nella (2) si ottiene il vettore $\boldsymbol{I}$ è .

$\boldsymbol{I} = (- mv_0, mv) =$ (- 1.5 Ns , 0.88 Ns) (3)

4.2 - In A la reazione è diretta lungo y ($R_x = 0$) e soddisfa la relazione:

$R_y - mg = ma_y = 0$ $\Rightarrow$ $R_y = mg = 4.9$ N (4)

In B il corpo ha un'accelerazione centripeta diretta lungo x nel verso negativo e la reazione è diretta lungo x (R_y =0) con componente x pari a:

$R_x = ma_x = - m\, v^2/r = - 5.2$ N. (5)

Soluzione Es.5

5.1– Applicando il teorema degli assi paralleli si trova:

$$I = m(r+L)^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m(r+L)^2 + m\frac{L^2}{3} = m\left[2(r+L)^2 + \frac{2}{5}r^2 + \frac{L^2}{3}\right] = 0.420 \text{ Kg m}^2 \qquad (1)$$

Nell'urto si conserva la componente L_z del momento angolare rispetto all'asse z di rotazione uscente dalla figura, dunque la velocità angolare ω_0 subito dopo l'urto soddisfa la relazione:

$$mv_0(r+L) = I\omega_0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_0 = \frac{mv_0(r+L)}{I} = 5.72 \text{ rad/s} \qquad (2)$$

Dopo l'urto si conserva l'energia meccanica e, quindi, la velocità angolare alla massima altezza si ottiene applicando la conservazione dell'energia. Per calcolare l'energia potenziale si deve trovare la posizione del centro di massa del sistema di due corpi costituiti dalla barra che ha massa *m* e centro di massa a distanza *L*/2 da *O* e un corpo di massa 2*m* (sfera + proiettile al centro) con centro di massa a distanza *L* + *r* da *O*. Di conseguenza il centro di massa si trova sempre a distanza

$$h = \frac{mL/2 + 2m(L+r)}{3m} = \frac{5}{6}L + \frac{2}{3}r = 0.617 \text{ m} \tag{3}$$

Durante il moto il centro di massa ruota attorno al centro. Se la velocità iniziale è sufficientemente alta il centro di massa continuerà a ruotare in definitivamente e raggiungerà la minima velocità quando la barra si troverà verticale ma sopra *O* . In tale ipotesi, la velocità nel punto di massima altezza si otterrà utilizzando il principio di conservazione dell'energia meccanica. La variazione di energia potenziale fra la posizione iniziale e quella di massima altezza è $\Delta U = 3\, mg\, (2\, h)$ dove *h* è quello di eq.(3). Prendendo lo zero dell'energia potenziale nella posizione iniziale si trova:

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(4r+5L) \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2mg(4r+5L)}{I}} \tag{4}$$

Sostituendo i valori numerici nella (4) si verifica facilmente che il termine sotto radice è minore di zero e, quindi, l'ipotesi che la barra arrivi a fare una rotazione completa è errata. Ciò significa che la barra si ferma quando raggiunge una posizione di massima altezza e torna indietro compiendo oscillazioni attorno alla posizione iniziale. Dunque, nel punto di massima altezza la velocità angolare è $\omega = 0$.

5.2. – La forza totale agente sul sistema è la somma della forza peso $3m\boldsymbol{g}$ e della forza di reazione $\boldsymbol{R}$ esercitata dall'asse. Per la I equazione Cardinale, vale la relazione:

$$3\, m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R} = 3m\, \boldsymbol{a}_{CM} \tag{5}$$

dove $\boldsymbol{a}_{CM}$ è l'accelerazione del centro di massa. Il centro di massa compie un moto circolare e, perciò la sua accelerazione centripeta è data da $\omega^2 h$ dove *h* è la distanza del centro di massa da *O* calcolata al punto (3).

Dunque, **R** è diretta lungo l'asse *y* e la sua componente *y* è:

$$R = 3mg + 3m\omega_0^2 h = 3m\left(g + \omega_0^2 h\right) = 27.0 \text{ N} \tag{7}$$