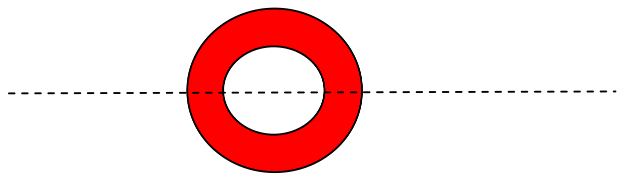
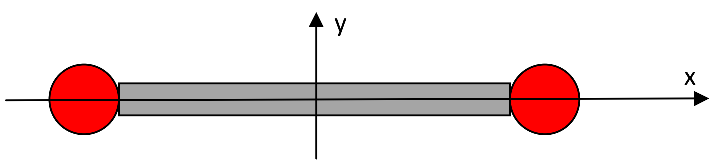
II Compitino di Fisica Generale 2016

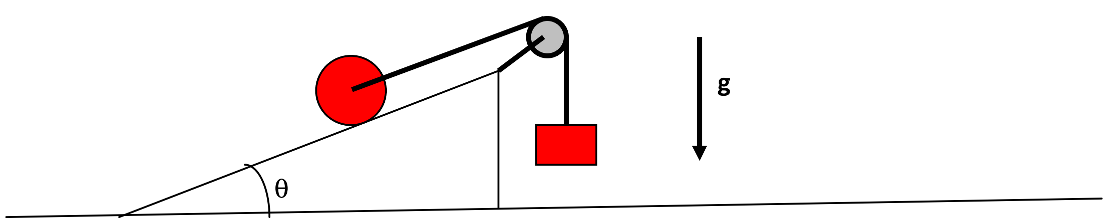
Esercizio 1 - Una sfera cava di massa $m = 2$ Kg ha raggio interno $a = 10$ cm e raggio esterno $b = 20$ cm. Si trovi il momento di inerzia della sfera rispetto ad un asse passante per il centro. (è utile sfruttare il fatto che il momento di inerzia di una sfera piena di massa M e raggio R è pari a $2\,MR^2/5$).



Esercizio 2 - Un sistema è costituito da due sfere di massa $m = 2$ Kg e raggio $r = 10$ cm. Le sfere sono collegate fra loro con un'asta cilindrica di massa m, raggio $r_c = 3$ cm e lunghezza $L = 30$ cm. Si dica quali lavori L_x e L_y devono essere fatti per mettere in rotazione il sistema con velocità angolare $\omega = 10$ rad/s attorno all'asse x e all'asse y di figura.



Esercizio 3 – Un cilindro di raggio $r = 10$ cm e massa $m = 2$ Kg è collegato ad un altro corpo di massa $m = 2$ Kg attraverso ad una fune inestensibile di massa trascurabile come mostrato in figura. Il corpo è appoggiato ad un piano inclinato con angolo di inclinazione $\theta = 30$ °. La carrucola ha massa trascurabile e attrito trascurabile.

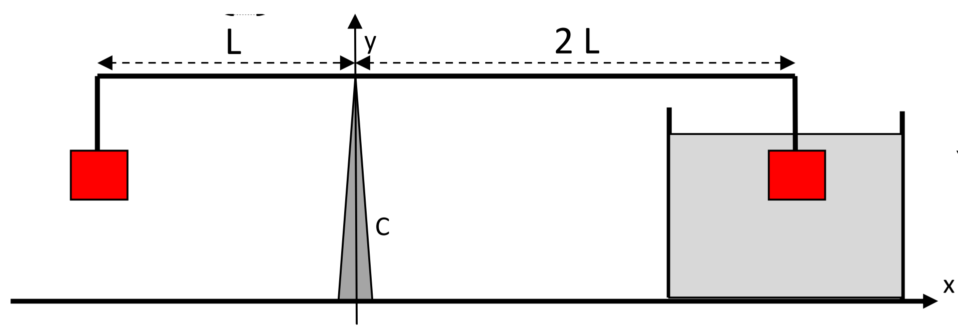


3.1 – Nell'ipotesi che il moto del cilindro sia di rotolamento puro, si calcoli la tensione T della fune.

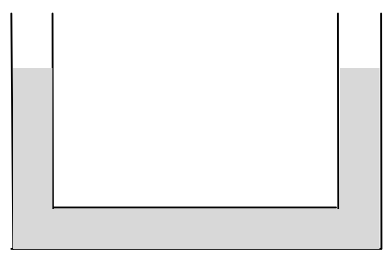
3.2 – Sapendo che il coefficiente di attrito statico è $\mu = 0.2$, si dica , <u>motivando opportunamente la risposta</u>, se il cilindro può effettivamente compiere un moto di rotolamento puro.

Esercizio 4 – Due corpi identici di massa m e densità ρ incognite sono collegati ad una bilancia come mostrato in figura. L'asta della bilancia su cui sono sospesi i due corpi ha massa trascurabile. Uno dei due corpi è immerso in una vasca contenente acqua mentre l'altro è in aria. Si osserva che, nella configurazione geometrica di figura, il sistema sta in equilibrio.

Si calcoli la densità ρ dei corpi. Si calcolino, inoltre, le componenti x ed y della reazione $\boldsymbol{R}$ esercitata dal cuneo C sull'asta nel caso particolare in cui la massa dei corpi è m = 2 Kg.



Esercizio 5 – Il tubo ad U mostrato in figura di sezione interna S = 100 cm^2 è riempito con acqua come mostrato schematicamente in figura e immerso in un'atmosfera a pressione p_0. Nella parte a sinistra viene, poi, immesso un litro di olio avente densità ρ = 900 Kg/m^3. Si calcoli il dislivello Δh fra la superficie libera dell'acqua e quella dell'olio ($\Delta h = h_{acqua} - h_{olio}$) e si dica da quale parte (sinistra o destra) il livello del fluido (olio o acqua) si porta ad altezza maggiore.



Esercizio 6 - Una mole di gas perfetto biatomico compie una espansione reversibile da un volume iniziale $V_0 = 10^{-3}$ m^3 a temperatura iniziale T_0 = 300 K fino ad un volume finale $V = 1.3\ V_0$. La trasformazione segue la legge $p = a\ V^3$ dove a è un coefficiente costante.

6.1 – Si trovi il valore della costante a , le sue dimensioni e la massima temperatura T_{max} raggiunta nella trasformazione.

6.2 – Si calcoli il lavoro L fatto dal gas nella trasformazione e il calore Q assorbito dal gas.

ATTENZIONE!!! : Lo studente deve giustificare i risultati finali mostrando tutti i passaggi intermedi necessari per arrivare al risultato finale. Risultati anche esatti ma forniti senza dare spiegazioni sufficienti sulla procedura seguita per ottenerli non verranno presi in considerazione.

Soluzione Esercizio 1- Il momento di inerzia I_b della sfera di raggio b piena con la stessa densità ρ della sfera cava è la somma del momento di inerzia I_a di una sfera di raggio a piena con la stessa densità ρ e di quello I della sfera cava, cioè $I_b = I + I_a$ da cui si deduce

$$I = I_b - I_a = 2\, m_b\, b^2/5 - 2\, m_a\, a^2/5 \tag{1}$$

dove $m_a = \rho\, 4\, \pi\, a^3/3$ e $m_b = \rho\, 4\, \pi\, b^3/3$ (2)

sono le masse delle sfere piene di raggio a e b e

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)} \tag{3}$$

Sostituendo la (3) nelle (2) e, poi, nella (1) si trova

$$I = \frac{2m}{5(b^3 - a^3)}(b^5 - a^5) = 3.54\ 10^{-2}\ \text{Kg m}^2 \tag{4}$$

Soluzione Esercizio 2 – I lavori fatti per mettere in rotazione il sistema sono

$$L_x = I_x\, \omega^2/2 \qquad \text{e} \qquad L_y = I_y\, \omega^2/2 \tag{1}$$

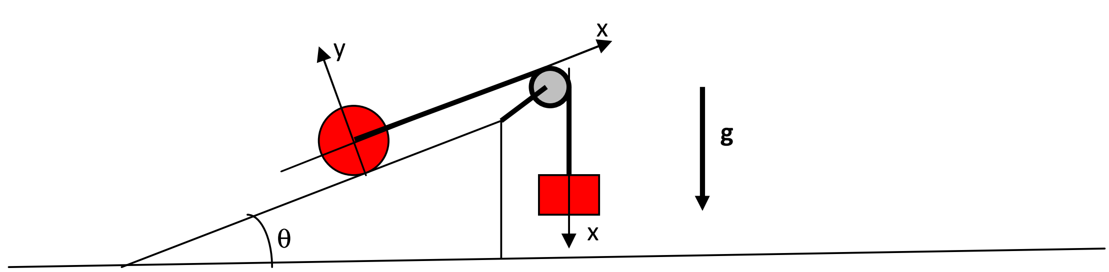
dove I_x e I_y sono i momenti di inerzia rispetto all'asse x ed y che sono pari alla somma dei momenti di inerzia delle sfere e del cilindro rispetto agli stessi assi. Dunque,

$$I_x = 4\, m\, r^2/5 + m\, r_c^2/2 = 1.69\ 10^{-2}\ \text{Kg m}^2 \tag{2}$$

e $$I_y = 4\, m\, r^2/5 + 2\, m\, (L/2 + r)^2 + m\, L^2/12 = 28.1\ 10^{-2}\ \text{Kg m}^2 \tag{3}$$

Conseguentemente, $L_x = 0.845$ J e $L_y = 14.1$ J (4)

Soluzione Esercizio 3 – 3.1 - Conviene prendere per descrivere il moto dei corpi gli assi x ed y mostrati in figura.



Le equazioni del moto di traslazione per il corpo e per il cilindro sono:

$$mg - T = m\,a \qquad (1)$$

$$T - F_s - mg \sin\theta = m\,a \qquad (2)$$

$$R - mg \cos\,\theta = 0 \qquad \text{e, quindi,} \qquad R = mg \cos\theta = 17.0 \quad \text{N} \qquad (3)$$

dove T è la tensione della fune e F_s è la forza di attrito statico che abbiamo assunto positivo nel verso opposto all'asse x. Per il moto di rotazione del cilindro attorno al punto di contatto vale la relazione (II Cardinale)

$$F_s\, r = m\, r^2\, \alpha/2 = m\, r\, a/2 \qquad \rightarrow \qquad F_s = m\, a\,/2 \qquad (4)$$

dove abbiamo sfruttato la relazione $\alpha = a/r$ valida per il rotolamento puro. La soluzione del sistema di tre equazioni (1), (2) e (4) nelle incognite T , F_s e a è:

$a = 2g\,(1 - \sin\theta)\,/5 = 1.96$ m/s^2, $T = m\,g\,(3/5 + 2\sin\theta/5) = 15.7$ N, $F_s = +\,mg\,(1 - \sin\theta)/5 = 1.96$ N (5)

3.2 – La soluzione precedente è valida solamente se la forza di attrito statico trovata in eq.(5) che è pari a $F_s = 1.96$ N e che è necessaria per il rotolamento puro è minore della massima forza di attrito statico che è pari a $\mu\, R = \mu\, m\, g \cos\theta = 3.40$ N. Poiché questa condizione è rispettata, ne consegue che **il cilindro compie un moto di rotolamento puro** sul piano inclinato.

Soluzione Esercizio 4 – Perché il sistema masse + barra sia in equilibrio è necessario che la forza totale agente sul sistema (forze peso sulle masse, reazione $\boldsymbol{R}$ esercitata dal cuneo e forza di Archimede $\boldsymbol{F}_A$ sul corpo a destra) sia nulla e che il momento di forza totale rispetto al punto di contatto con il cuneo sia nullo. Deve, perciò, essere soddisfatto il sistema di 2 equazioni:

$$2m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{F}_A = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{R} = -\,2m\boldsymbol{g} - \boldsymbol{F}_A = (0, 0, 2mg - \rho_a\, g\, V) \qquad (1)$$

$$m\,g\,L\; - \; mg\, 2L + \rho_a\, g\, V\, 2\, L\; = 0 \qquad \rightarrow \qquad m = 2\,\rho_a\, V = 2\, m\, \rho_a\,/\,\rho \qquad (2)$$

dove ρ_a è la densità dell'acqua $\rho_a = 1000$ Kg/m^3 e $V = m/\rho$ è il volume occupato dai corpi.

Dalla (2) si deduce $\rho = 2\,\rho_a = 2000$ Kg/m^3 che, sostituito nella (1) utilizzando la relazione (2) ($\rho_a\, V = m/2$) fornisce:

$$R = (0, 0, 3\, mg/2\,) = (\,0\text{ N}, 0\text{ N}, 29.4\text{ N}) \qquad (3)$$

Soluzione Esercizio 5 – Per la legge di Stevino, la pressione nell'acqua nel punto immediatamente sotto la superficie di separazione acqua-olio nel contenitore a sinistra che si trova ad altezza H dal fondo del recipiente è pari a

$$p = p_0 + \rho\, g\, h = p_0 + \rho\, g\, V/S \qquad (1)$$

dove $h = V/S =$ 0.1 m è l'altezza dell'olio nel recipiente a sinistra. Per la legge di Stevino, la pressione dell'acqua nel recipiente a destra nel punto alla stessa altezza H dal fondo del recipiente è pari a

$$p = p_0 + \rho_\alpha\, g\, (H_1 - H) \qquad (2)$$

dove ρ_a = 1000 Kg/m^3 è la densità dell'acqua e H_1 è l'altezza della superficie libera dell'acqua rispetto al fondo del recipiente. Uguagliando la (1) con la (2) si deduce che l'altezza raggiunta dall'acqua nel recipiente a sinistra è:

$$H_1 = H + \rho V/(\rho_a\, S) \qquad (3)$$

D'altra parte, l'altezza (rispetto al fondo del recipiente) della superficie libera dell'olio a sinistra è:

$$H_2 = H + h = H + V/S \qquad (4)$$

Dunque, la differenza di altezza Δh fra la superficie libera dell'acqua e quella dell'olio è:

$$\Delta h = H_1 - H_2 = (\,\rho/\rho_a - 1)\ V/S = -\ 0.01\ \text{m} = -\ 1\ \text{cm} \qquad (5)$$

Il segno - in eq.(5) indica che la superficie libera è più alta nel contenitore a sinistra dove c'è l'olio.

Soluzione Esercizio 6 – 6.1 – a ha le dimensioni di una pressione diviso un volume al cubo e, quindi, Pa/m^9 . La pressione iniziale deve soddisfare la relazione $p = a\, V^3$ e, quindi, è pari a

$$p_0 = a\, V_0^{\,3}\ . \qquad (1)$$

D'altra parte la pressione deve soddisfare la legge dei gas perfetti e, quindi,

$$a\, V_0^{\,3} = R\, T_0/V_0 \qquad \rightarrow \qquad a = R\, T_0\, /V_0^{\,4} = \ 2.49\ \ 10^{15}\ \text{Pa/ m}^9 \qquad (2)$$

La temperatura ad un dato volume si ottiene sostituendo nella legge dei gas perfetti la pressione $p = a\, V^3$. Si trova

$$T = a\, V^4\, /R = V^4 T_0\, /V_0^{\,4} \qquad (3)$$

Dalla (3) si deduce che la temperatura è una funzione crescente del volume e, quindi, il massimo valore si raggiunge quando il volume è massimo e pari a 1.3 V_0. Sostituendo questo valore nella (3) si trova

$$T_{\max} = 2.86\ T_0 = 857\ \text{K} \qquad (4)$$

6.2 – Il lavoro fatto dal gas è $L = \int_{V0}^{1.3V0} aV^3 dV = a\frac{V^4}{4}\Big]_{V0}^{1.3V0} = \ 1.16\ 10^3$ J (5)

Il calore assorbito si ottiene utilizzando il I principio della Termodinamica: $Q = L + \Delta U$. La variazione di energia del gas biatomico è

$$\Delta U = 5\ R\ (\ T_{\max}\ -\ T_0)\ /2 = \ 1.16\ 10^4\ \text{J} \qquad (6)$$

da cui si deduce: $Q = L + \Delta U = \ 1.27\ 10^4\ \ \text{J}$ (7)