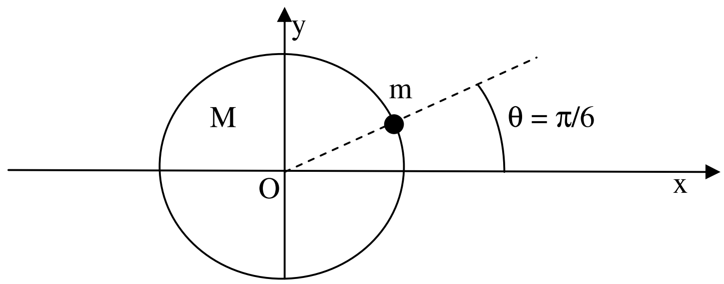
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE, CIVILE-AMBIENTALE , e EDILE. 21 Luglio 2016

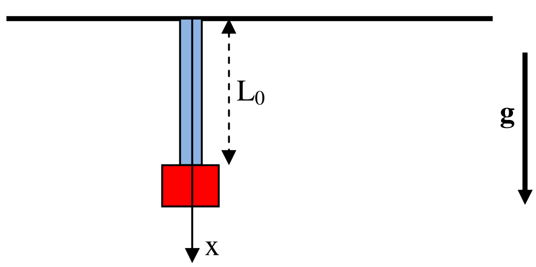
Esercizio 1 – Una giostra di massa M = 500 Kg ha raggio r = 10 m e ruota in senso antiorario con velocità angolare ω_0 = 0.2 rad/s attorno al proprio asse verticale. Sul bordo della giostra si trova un uomo di massa m = 100 Kg. Al tempo t = 0 l'uomo si trova nella posizione di figura. Dopodichè l'uomo cammina sulla giostra fino a raggiungere la posizione centrale.



1.1 – Si trovino le componenti x ed y della forza ***R*** esercitata dall'asse sulla giostra al tempo t = 0 e la velocità angolare ω raggiunta dalla giostra quando l'uomo raggiunge la posizione centrale.

1.2 – Si dica quali sono le forze agenti sull'uomo durante il suo spostamento e si dica quali di queste forze compiono lavoro e quali non compiono lavoro. Si calcolino i lavori compiuti dalle varie forze agenti sull'uomo nel passaggio dalla posizione iniziale a quella finale al centro. (Si noti che, per le leggi della meccanica, almeno una di queste forze deve necessariamente compiere un lavoro diverso da zero.)

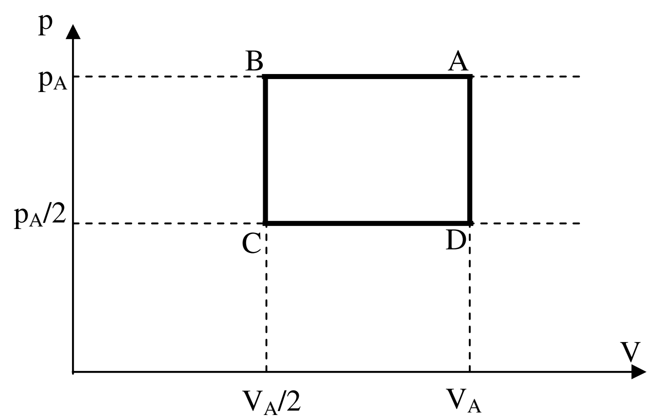
Esercizio 2- Una molla con costante elastica K = 50 N/m e lunghezza a riposo L_0 = 1 m è attaccata al soffitto. All'altro estremo della molla è attaccato un corpo di massa m = 1 kg. Inizialmente la massa viene tenuta ferma a distanza L_0 dal soffitto e, all'istante t = 0 la massa viene lasciata libera.



2.1 – Si trovi l'ampiezza di oscillazione della molla e la forza massima (in modulo) esercitata dalla molla sul soffitto durante l'oscillazione .

2.2- Si trovi a quale istante t la massa raggiunge per la prima volta la distanza $d = L_0 + \Delta x$ dal soffitto con Δx = 0.1 m.

Esercizio 3 – Una mole di gas perfetto monoatomico si trova inizialmente nello stato di equilibrio individuato dal punto *A* nel diagramma *p -V* a pressione $p_A = 10^5$ Pa e volume $V_A = 10^{-2}$ m^3. Il gas compie il ciclo *ABCD* mostrato in figura dove le pressioni e i volumi sono indicati in figura.



3.1 - Si dica se il ciclo è reversibile, se il sistema opera come motore o come pompa di calore e se il sistema opera fra due termostati o fra più di due termostati. Si trovi il calore totale assorbito nel ciclo (con il corretto segno) e la temperatura massima T_{max} e minima T_{min}.

3.2 – Si trovino i calori assorbiti nei singoli tratti *AB*, *BC*, *CD* e *DA* e si dica quali di questi calori sono realmente assorbiti dal gas e quali sono, in realtà, ceduti dal gas.

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es. 1- **1.1**- L'unica forza esterna agente sul sistema uomo-giostra nel piano $x\ y$ è la reazione $\boldsymbol{R}$ dell'asse agente sulla giostra. Dunque, per la I equazione Cardinale,

$$\vec{R} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{R} = \frac{d\vec{P}_{uomo}}{dt} + \frac{d\vec{P}_{giostra}}{dt} = \frac{d(m\vec{v} + M\vec{V})}{dt} = m\vec{a} \qquad (1)$$

dove $\boldsymbol{V} = 0$ (il neretto indica vettore) è la velocità del centro di massa della giostra, $\boldsymbol{v}$ è la velocità dell'uomo e $\boldsymbol{a}$ è la sua accelerazione. Ma l'uomo compie inizialmente un moto circolare ed uniforme e l'accelerazione è l'accelerazione centripeta diretta verso il centro di modulo $\omega_0^2\ r$.

Conseguentemente $\boldsymbol{R} =$ (- $m\omega_0^2\ r\cos\theta$, - $m\ \omega_0^2\ r\sin\theta$) = (- 34.6 N, - 20 N) (2)

La componente z del momento delle forze esterne rispetto al centro del disco è nulla perché la reazione $\boldsymbol{R}$ è applicata in quel punto e la forza peso è diretta lungo z. Dunque, si conserva la componente z del momento angolare del sistema uomo-giostra rispetto ad O. Dunque,

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)\omega_0 r^2 = \frac{M}{2}\omega r^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{M + 2m}{M}\omega_0 = 0.28 \text{ rad/s} \qquad (3)$$

1.2 - Le forze che agiscono sull'uomo sono la reazione vincolare normale $\boldsymbol{R}$, la forza peso $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ e la forza di attrito statico $\boldsymbol{F}_s$ esercitata dal pavimento della giostra sull'uomo (la forza è di attrito statico perché il punto di contatto fra piede e piattaforma è fermo rispetto alla piattaforma). La reazione vincolare e la forza peso non fanno lavoro e, quindi, l'unica forza che fa lavoro è la forza di attrito statico e necessariamente questa forza deve fare lavoro perché l'energia cinetica dell'uomo cambia. Si osservi che, in questo caso la forza di attrito statico fa lavoro perché l'uomo è su una giostra che ruota e, quindi, il piede dell'uomo su cui è applicata la forza di attrito non sta fermo ma si sposta. Dunque il lavoro della forza di attrito coincide con il lavoro totale delle forze che, per le leggi della meccanica, è uguale alla variazione di energia cinetica dell'uomo. L'energia cinetica iniziale è

$$K_i = \frac{1}{2} m\omega_0^2 r^2 = 200 \text{ J} \qquad (4)$$

mentre l'energia cinetica finale è:

$$K_f = 0 \text{ J} \qquad (5)$$

Ma allora, il lavoro della forza di attrito statico è pari a

$$L = K_f - K_i = 280 \text{ J}. \qquad (6)$$

Soluzione Esercizio 2. **2.1** Prendiamo come origine dell'asse x la posizione in cui la molla è a riposo. La posizione di equilibrio è quella in cui la forza applicata sul corpo è nulla, cioè dove vale l'uguaglianza fra la forza elastica e la forza peso e, quindi:

$$K\,x = m\,g \qquad \Rightarrow \qquad x = x_{eq} = \frac{mg}{K} \qquad (1)$$

L'equazione del moto della massa m è $kx + m\frac{d^2}{dt^2}x = mg$ che ammette come soluzione generale:

$$x = x_{eq} + A\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \varphi\right) \qquad (2)$$

Che deve soddisfare le condizioni iniziali $x = 0$ e $dx/dt = 0$. La soluzione che soddisfa entrambe le condizioni iniziali corrisponde a $A = x_{eq} = 0.196$ m e $\varphi = \pi$. Dunque:

l'ampiezza delle oscillazioni è $A = x_{eq} = 0.196$ m e $x(t) = x_{eq} - x_{eq}\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)$ (3)

dove il – davanti al coseno è perché abbiamo usato la proprietà del coseno $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$.

Il modulo della forza Kx esercitata dalla molla è massimo quando l'allungamento $x(t)$ della molla è massimo, cioè quando $x(t)$ in eq.(3) è pari a 2 x_{eq} (questo valore si ottiene quando il coseno in eq.(3) è pari a -1). Dunque, il massimo modulo della forza è:

$F_{max} = 2\,K\,x_{eq} = 19.6$ N. (4)

2.2 – La legge oraria del moto è quella di eq.(3). Quando la distanza dal soffitto è $L_0 + \Delta x$, il valore di x in eq.(3) è pari a Δx e, quindi, il tempo t cercato è quello che soddisfa l'equazione:

$$\Delta x = x_{eq} - x_{eq}\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right) = \frac{x_{eq} - \Delta x}{x_{eq}} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{K}{m}}t = \arccos\left(\frac{x_{eq} - \Delta x}{x_{eq}}\right) \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{m}{K}}\arccos\left(\frac{x_{eq} - \Delta x}{x_{eq}}\right) = 0.150 \text{ s} \quad (5)$$

Attenzione!: per svolgere il calcolo numerico finale di eq.(5) si deve calcolare l'arcocoseno in radianti.

Soluzione Esercizio 3 –

Soluzione 3.1 –

Il ciclo è rappresentato da una curva continua, ciò significa che il ciclo passa attraverso stati di equilibrio e, quindi, è **reversibile**. Il lavoro fatto dal gas nel ciclo è negativo e, quindi, il sistema opera come **pompa di calore**. Durante il ciclo la temperatura varia in modo continuo fra un valore massimo $T_{max} = p_A V_A / R = 120$ K in A fino ad un valore minimo

$T_{min} = p_A V_A /(4R) = 30$ K in C. (1)

Quindi, durante il ciclo il gas si deve trovare in equilibrio con **più di due termostati** poiché durante il ciclo il gas si trova in equilibrio a temperature T comprese fra T_{min} e T_{max}. Poiché la variazione di energia interna in un ciclo è nulla, per il I principio della Termodinamica, il calore totale assorbito dal gas è $Q_{tot} = L$ dove L è il lavoro fatto dal gas che è pari all'area del rettangolo di figura con segno negativo. Dunque:

$Q_{tot} = L = -\ 250$ J (2)

Soluzione 3.2

- **tratto AB** : **isobara**. In questo tratto $L_{AB} = -\,p_A V_A/2$ e il calore assorbito è

$Q_{AB} = L_{AB} + U_B - U_A = -\,5\,p_A V_A/4 = -1250$ J (3)

Il calore assorbito dal gas è negativo e, quindi, è in realtà, ceduto ai termostati.

Tratto BC : **isocora**. In questo tratto $L_{BC} = 0$ e, perciò:

$Q_{BC} = U_C - U_B = -\,3\,p_A V_A/8 = -\,375$ J (4)

Il calore assorbito dal gas è negativo e, quindi, è in realtà, ceduto ai termostati.

Tratto CD : **isobara**. In questo tratto $L_{CD} = p_A V_A/4$ e, perciò:

$Q_{CD} = L_{CD} + U_D - U_C = 5\,p_A V_A/8 = 625$ J (5)

Il calore assorbito dal gas è positivo e, quindi, è effettivamente assorbito dai termostati.

Tratto DA : **isocora**. In questo tratto $L_{DA} = 0$ e, perciò:

$Q_{DA} = U_A - U_D = 3\,p_A V_A/4 = 750$ J (6)

Il calore assorbito dal gas è positivo e, quindi, è effettivamente assorbito dai termostati.

Si verifica immediatamente che la somma algebrica dei calori precedenti è proprio pari al valore calcolato precedentemente in eq.(2).