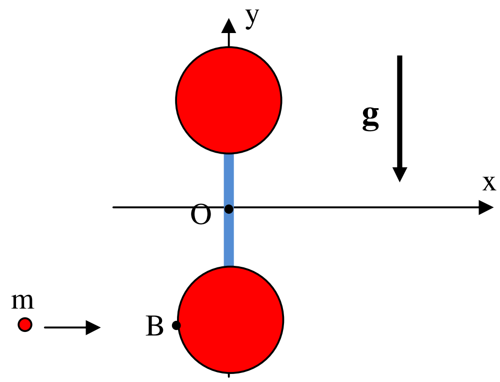
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE, CIVILE-AMBIENTALE , e EDILE. 1 Febbraio 2017

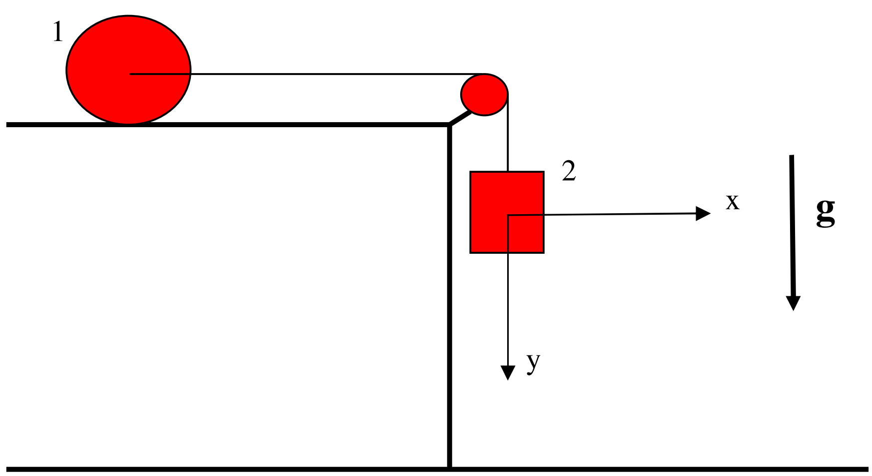
Esercizio 1 - Un manubrio è costituito da due sfere di masse pari a m = 1 kg e raggio r = 10 cm collegate da un'asta di lunghezza $L = 2\ r$ = 20 cm e massa m e si trova nella posizione mostrata in figura. Il sistema è vincolato a ruotare senza attrito attorno ad un asse passante per O e perpendicolare al piano di figura. Un piccolo proiettile di massa $m_p = m/100$ incide nel punto B in figura con velocità lungo l'asse x pari a v_0 = 100 m/s e resta conficcato in B.



1.1 – Si dica, giustificando la risposta, se nel processo si conserva la quantità di moto e si trovi la velocità angolare ω del sistema subito dopo l'urto. Per semplificare i calcoli, si assuma trascurabile il momento di inerzia del proiettile rispetto a quello del manubrio.

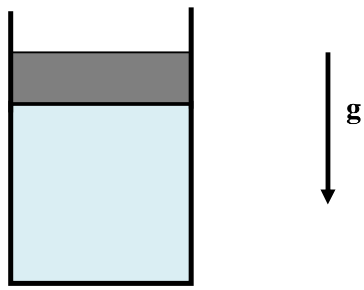
1.2 – Si trovino le componenti x ed y dell'impulso $\boldsymbol{I}$ della forza esercitata dall'asse durante l'urto.

Esercizio 2 - un cilindro (corpo 1) di raggio r = 10 cm e massa m = 2 kg è appoggiato sulla superficie orizzontale di un tavolo. I coefficienti di attrito statico e dinamico sono uguali e pari a μ = 0.4. Un corpo 2 di massa $M = 3\ m$ = 6 kg si trova inizialmente ad altezza h = 2 m dal pavimento ed è collegato all'asse del cilindro con una fune inestensibile e di massa trascurabile appoggiata ad una carrucola di massa trascurabile come mostrato in figura. Il sistema è inizialmente fermo e viene lasciato libero di muoversi al tempo t = 0.



2.1- Si dica se il moto del cilindro è di rotolamento puro o se esso scivola sul tavolo.
2.2 – Si trovi a quale istante di tempo il corpo 2 arriva sul pavimento.

Esercizio 3 – Un gas biatomico ideale è contenuto in un cilindro di sezione $S = 100$ cm^2 in presenza di un'atmosfera esterna a pressione $p_0 = 10^5$ Pa. Le pareti del cilindro sono conduttrici termiche. La temperatura dell'ambiente esterno è mantenuta al valore $T_0 = 300$ K. Un pistone di massa trascurabile delimita il gas entro una regione di volume $V_0 = 3\ 10^{-3}$ m^3. Ad un dato istante, sul pistone viene posto un corpo di massa $M = 30$ kg. Conseguentemente, il pistone si sposta compiendo numerose oscillazioni finché esso si ferma nuovamente.



3.1 – Si dica se la trasformazione è reversibile e si calcoli la pressione finale del gas e il volume finale del gas.

3.2 – Si trovi il calore assorbito dal gas nella trasformazione.

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es.1- 1.1 – L'asse esercita una forza impulsiva sul sistema e, quindi, non si conserva la quantità di moto. Nell'urto, l'unica forza esterna impulsiva agente sull'intero sistema di corpi è quella esercitata dall'asse in O. Dunque, il momento di forza rispetto al punto O è nullo e, quindi, il momento angolare del sistema si conserva. Il momento angolare prima dell'urto è dovuto solo al proiettile ed è diretto lungo l'asse z uscente dal piano della figura. Il valore della componente z del momento angolare iniziale è

$$L_i = m\, v_0\, (L/2 + r)/100 = 0.2 \text{ kg m}^2/\text{s} \qquad (1)$$

Subito dopo l'urto, il sistema è costituito dal manubrio e dal piccolo proiettile posto in B. Trascurando il momento di inerzia del proiettile, il momento di inerzia totale rispetto all'asse passante per O è, perciò:

$$I = 2\,[\, 2\, m\, r^2/5 + m\, (L/2 + r)^2] + mL^2/12 \qquad (2)$$

Tenendo conto che $L = 2\, r$, la (2) diventa: $I = 137\, m\, r^2 /15 = 0.091$ Kg m^2 (3)

Applicando la conservazione del momento angolare, $I\, \omega = m\, v_0\, (L/2 + r)/100$, si trova:

$$\omega = m\, v_0\, (L/2 + r)/\, (100\, I\,) = 2.19 \text{ rad/s} \qquad (4)$$

1.2 - Prima dell'urto, la quantità di moto del sistema è solo quella del proiettile, diretta lungo l'asse x e data dal vettore:

$$\boldsymbol{P}\text{i} = (\, m\, v_0 /100\, ,\, 0\,) = (1, 0) \text{ Kg m/s} \qquad (5)$$

Dopo l'urto, la quantità di moto del manubrio resta uguale a 0 poiché il suo centro di massa è nel punto di rotazione O che resta fermo. Ne consegue che la quantità di moto del sistema dopo l'urto è ancora data dalla quantità di moto del proiettile. Ora, subito dopo l'urto il proiettile si trova nel punto B e descrive una circonferenza attorno ad O. Il raggio R della circonferenza è pari alla distanza del punto B da O che è

$$R = [r^2 + (L/2 + r)^2]^{1/2} = (5)^{1/2}\, r \qquad (6)$$

Il vettore velocità del proiettile ha modulo $v = \omega R$ ed è diretto tangenzialmente alla circonferenza di raggio R nel punto B. Dunque, il vettore velocità fa un angolo θ con l'asse x pari a:

$$\theta = \text{atan}\, [r/(L/2 + r)] = \text{atan}\, (1/2) = 26.56° \qquad (7)$$

Ne consegue che il vettore quantità di moto finale del proiettile ha componenti x ed y diverse da zero ed è pari a:

$$\boldsymbol{P}_f = (\, m\, \omega R \cos\theta/100\, ,\, - m\, \omega R \sin\theta/\, 100\,) \qquad (8)$$

Poiché l'unica forza esterna impulsiva agente sul sistema è quella esercitata dall'asse, ne consegue che l'impulso della forza esercitato dall'asse è:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}_f - \boldsymbol{P}_i = [\, (m\, \omega R \cos\theta - m\, v_0\,)/100\, ,\, - m\, \omega R \sin\theta/100\,] \qquad (9)$$

Sostituendo i valori numerici si trova:

$$\boldsymbol{I} = (\, - 0.996\, ,\, - 0.002) \text{ Kg m/s}^2. \qquad (10)$$

Soluzione Es.2 - **2.1**- Poiché la fune e la carrucola hanno massa trascurabile, la tensione è la stessa in ogni punto della fune. Assumiamo che il moto sia di rotolamento puro indicando con T la tensione della fune, con F_s la forza di attrito statico (assunta positiva nel verso opposto ad x) e con R la reazione normale del tavolo. Le equazioni del moto dei due corpi sono:

corpo 1 : $T - F_s = m\,a$ (1)

$R - mg = 0$, cioè $R = m\,g$ (2)

$F_s\,r = m\,r^2\,\alpha/2 = m\,r\,a/2$ (3)

La (3) fornisce $F_s = m\,a/2$ (4)

corpo 2 : $M\,g - T = M\,a$ (5)

Sommando membro a membro la (1), la (4) e la (5) si trova, dopo semplici passaggi,

$$a = 2\,M\,g\,/\,(\,3m + 2\,M) = 2\,g\,/3 \qquad (6)$$

dove, per ottenere l'ultimo termine a destra abbiamo sostituito nella (6) $M = 3\,m$. Sostituendo a di eq.(6) nella (4) e nella (5) si trova:

$$F_s = m\,M\,g\,/\,(\,3\,m + 2\,M\,) = m\,g/3 = 6.53\ \mathrm{N} \qquad (7)$$

e $\mathrm{T} = 3\,m\,M\,g\,/\,(\,3\,m + 2\,M\,) = mg = 19.6\ \mathrm{N}$ (8)

Perché il corpo 1 non scivoli, il modulo della forza di attrito deve essere minore della massima forza di attrito che è pari a

$$\mu\,R = \mu\,m\,g = 7.84\ \mathrm{N}. \qquad (9)$$

Poiché la forza di attrito di eq. (7) è, effettivamente, minore del massimo valore di eq.(9), il moto del cilindro è di rotolamento puro.

2.2 – Il moto del corpo 2 è un moto uniformemente accelerato con accelerazione $a = 2\,g\,/3$ (vedi eq.(6)) diretta nel verso positivo dell'asse y. Prendendo come origine dell'asse y la posizione iniziale, si trova:

$$y(\mathrm{t}) = g\,t^2\,/3 \qquad (11)$$

Il corpo tocca terra all'istante t in cui $y(t) = h = 2$ m. Dunque

$$h = g\,t^2\,/3 \quad \text{, cioè} \quad t = (3\,h\,/g)^{1/2} = 0.78\ \mathrm{s} \qquad (12)$$

Soluzione Esercizio 3 – 3.1 – La trasformazione non avviene lentamente attraverso stati intermedi di equilibrio e, quindi, non è una trasformazione reversibile. Quando il sistema si ferma significa che ha raggiunto l'equilibrio meccanico e termico. Dunque, la temperatura finale del gas sarà ancora uguale a quella dell'atmosfera circostante pari a

$$T = T_0 = 300\ \mathrm{K} \qquad (1)$$

Inoltre, il pistone sarà in equilibrio meccanico solo se la forza di pressione esercitata dal gas sarà uguale ed opposta alla forza di pressione esercitata dall'atmosfera esterna e dalla massa M. Dunque,

$$p\,S = p_0\,S + M\,g \quad \text{, cioè ,} \quad p = p_0 + M\,g/\,S = 1.29\ 10^5\ \mathrm{Pa} \qquad (2)$$

poiché la temperatura finale è la stessa di quella iniziale, deve valere la relazione $p\,V = p_0\,V_0$ da cui si deduce

$$V = V_0 \; p_0 / p = \; V_0 \; p_0 / (p_0 + M \, g / \, S) = 2.33 \; 10^{-3} \; \text{m}^3 \qquad (3)$$

3.2 - Nella trasformazione la temperature del gas non è cambiata e, quindi, anche l'energia interna del gas non è cambiata. Di conseguenza, per il I principio della Termodinamica, il lavoro fatto dalle forze esterne (pressione atmosfera esterna e forza peso) deve essere uguale all'opposto del calore assorbito dal gas. Dunque,

$$Q = - L_{\text{est}} \qquad (4)$$

Ora sia la forza di pressione $p_0 \; S$ che la forza peso $M \; g$ sono dirette verso il basso e costanti. Dunque, lo spostamento Δs del pistone è nella stessa direzione e verso della forza e, quindi il lavoro delle forze esterne è

$$L_{est} = (M \, g + \; p_0 \, S) \;\; \Delta s \qquad (5)$$

Ora, lo spostamento Δs del pistone è pari a

$$\Delta s = (\; V_0 \; - V \;) \, / \, S \; = 0.067 \text{ m} = 6.7 \;\; \text{cm} \qquad (6)$$

Dunque il calore assorbito è

$$Q = - L_{\text{est}} \; = \; - 87 \text{ J} \qquad (7)$$