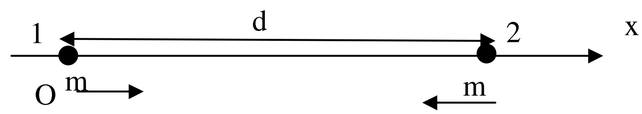
I COMPITINO DI FISICA GENERALE 24-2-2017

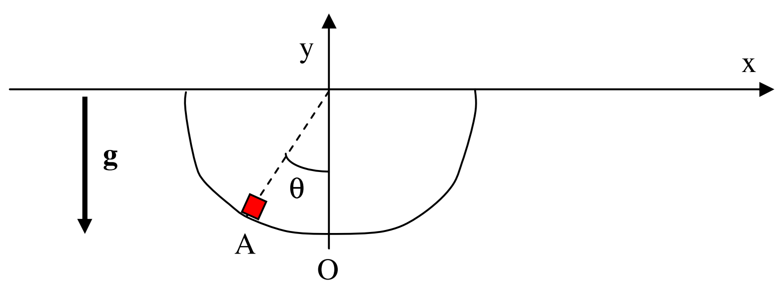
Esercizio 1 Due automobili (1 e 2) di masse *m* uguali si trovano inizialmente (tempo t = 0) su una strada rettilinea nelle posizioni $x_1 = 0$ e $x_2 = d = 1000$ m. L'automobile 1 è inizialmente ferma e si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione $a = 2$ m/s^2 nel verso positivo dell'asse *x*. L'automobile 2 si muove con velocità di modulo $v(t) = 4\ 10^{-3}\ t^3$ e diretta in verso opposto.



1.1- Si dica se il moto dell'automobile 2 è un moto uniformemente accelerato e si trovi in quale istante t le due auto si urtano.

1.2 – Supponendo che dopo l'urto le due auto restino attaccate, si trovi direzione, verso e modulo della velocità $\boldsymbol{V}$ delle due auto dopo l'urto.

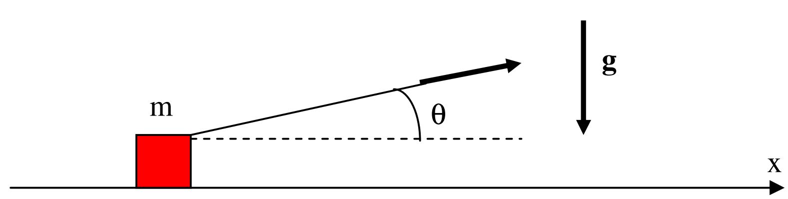
Esercizio 2 Un corpo di massa m = 100 g , può scivolare senza attrito su un profilo semisferico (il disegno è solo qualitativo) di raggio r = 2 m. Al tempo iniziale t = 0 il corpo è fermo nel punto *A* individuato dall'angolo $\theta = 30°$.



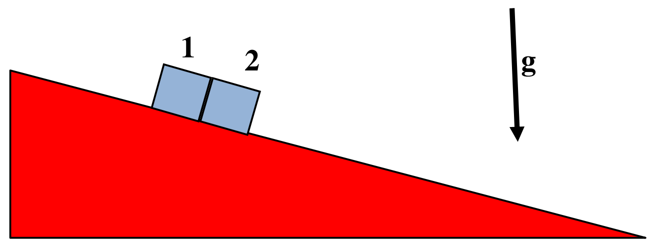
2.1– Si trovino le componenti R_x e R_y della forza di reazione esercitata dal vincolo sul corpo nel punto *A* e le componenti *x* ed *y* dell'accelerazione del corpo in *A*.

2.2- Si calcoli la velocità raggiunta dal corpo in *O* e le componenti *x* ed *y* della forza di reazione vincolare esercitata sul corpo quando si trova in *O*.

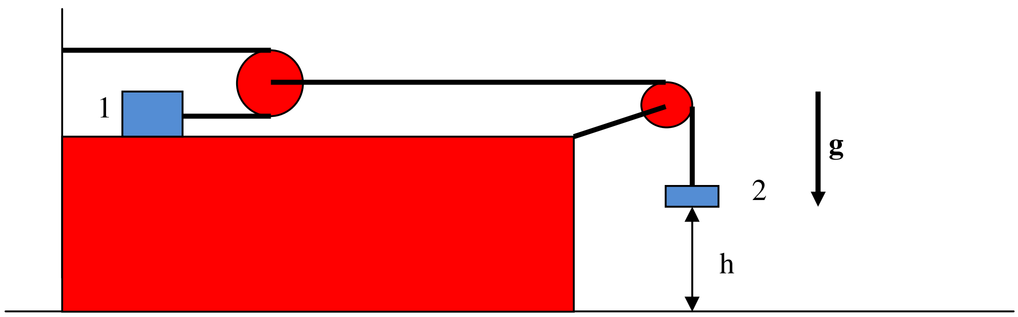
Esercizio 3 – Una cassa di massa m = 100 kg è appoggiata su un pavimento orizzontale. La cassa è collegata ad una fune inestensibile e di massa trascurabile che forma un angolo θ = 30° con l'orizzontale. Il coefficiente di attrito statico fra cassa e pavimento è pari a μ = 0.5. All'estremo libero della fune viene esercitata una forza $\boldsymbol{F}$ come mostrato in figura. Si dica quale minimo valore deve avere la forza F se si vuole che la cassa scivoli sul pavimento.



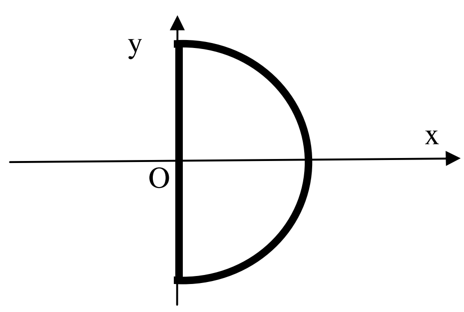
Esercizio 4 – Due corpi 1 e 2 di masse uguali e pari a m = 2 kg sono appoggiati l'uno sull'altro e scivolano su un piano inclinato con angolo di inclinazione θ = 30°. I coefficienti di attrito dinamico dei due corpi sono, rispettivamente, μ_1 = 0.2 e μ_2 = 0.4. Si dica se i corpi restano attaccati durante il moto e si calcoli il valore della forza di reazione esercitata dal corpo 1 sul 2.



Esercizio 5 – Due corpi 1 e 2 di masse uguali e pari a m = 2 kg sono collegati a a due carrucole di massa trascurabile e a due funi inestensibili e di massa trascurabile come mostrato in figura. I due corpi sono inizialmente fermi e corpo 2 si trova inizialmente ad altezza h = 2 m dal pavimento. Il coefficiente di attrito dinamico fra il corpo 1 e la superficie orizzontale di appoggio è pari a μ = 0.5. Si calcolino le velocità v_1 e v_2 dei due corpi quando il corpo 2 arriva a terra. (Attenzione! <u>le velocità e gli spostamenti dei due corpi non sono uguali</u>).



Esercizio 6 – Un anello è costituito da un sottile filo omogeneo di sezione costante e di forma semicircolare di raggio r = 10 cm come mostrato in figura.



Si trovino le coordinate x_{CM}, y_{CM} e z_{CM} del centro di massa (l'asse z è perpendicolare al piano della figura ed uscente).

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es. 1- 1.1 l'accelerazione dell'auto 2 ha valore $a_2 = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 12\ 10^{-3}\ t^2$ che dipende dal tempo. Dunque il moto NON è uniformemente accelerato. Le leggi orarie del moto delle due auto lungo l'asse x sono:

$$x_1(t) = a\, t^2/2 \tag{1}$$

$$x_2(t) = d - \int_0^t v\,dt = d - 0.001\, t^4 \tag{2}$$

L'urto avviene quando $x_1(t) = x_2(t)$ cioè $a\, t^2/2 = d - 0.001\, t^4$ (3)

Per risolvere la (3) poniamo $y = t^2$. In tal modo si ottiene un'equazione quadratica in y la cui soluzione positiva (dobbiamo scartare quella negativa perché $y = t^2 > 0$) è:

$$y = \frac{-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 0.004d}}{0.002} = 618\ \mathrm{s}^2 \tag{4}$$

Da cui si deduce $t = (y)^{0.5} = 24.9$ s (5)

1.2- Subito prima dell'urto le componenti delle velocità delle due auto lungo x sono:

$v_1 = a\, t = 49.8$ m/s e $v_2 = -\ 0.004\, t^3 = -\ 61.8$ m/s (6)

L'urto è totalmente anelastico perché le due auto dopo l'urto hanno la stessa velocità. Nell'urto si conserva la quantità di moto del sistema. Subito dopo l'urto la quantità di moto è un vettore giacente lungo l'asse x ed ha componente x pari a

$$p_\mathrm{i} = m\, v_1 + m v_2 = m\,(v_1 + v_2) = -\ 12\ m \tag{7}$$

Dopo l'urto la quantità di moto è ancora diretta lungo x ed è pari a $p_\mathrm{f} = 2\, mV$ (8)

Uguagliando le due espressioni si ottiene: $V = (v_1 + v_2)/2 = -\ 6.0$ m/s (9)

Il segno – indica che il verso è opposto al verso dell'asse x.

Soluzione Es.2 – **2.1** - la reazione in A è diretta radialmente verso il centro mentre l'accelerazione è solo tangenziale (l'accelerazione centripeta è nulla perché il corpo è fermo) ed è tangente al profilo nel verso che va da A ad O. Le equazioni del moto lungo l'asse radiale (verso il centro) e tangenziale sono:

$$R - mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad R = mg\cos\theta \tag{1}$$

$$mg\sin\theta = ma \quad \Rightarrow \quad a = g\sin\theta \tag{2}$$

dove R è la reazione e a l'accelerazione tangenziale. Scomponendo i vettori $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{a}$ lungo gli assi x e y si trova:

$$R_\mathrm{x} = R\sin\theta = mg\sin\theta\cos\theta = 0.424\ \mathrm{N} \tag{3}$$

$$R_\mathrm{y} = R\cos\theta = mg\cos^2\theta = 0.735\ \mathrm{N} \tag{4}$$

$$\mathrm{a_x} = a\cos\theta = g\sin\theta\cos\theta = 4.24\ \mathrm{m/s^2} \tag{5}$$

$$\mathrm{a_y} = -\ a\sin\theta = -\ g\sin^2\theta = -\ 2.45\ \mathrm{m/s^2} \tag{6}$$

2.2- Poiché tutte le forze sono conservative, si conserva l'energia meccanica. Prendendo come zero dell'energia il punto O, all'inizio l'energia meccanica è solo potenziale e pari a

$$E_\mathrm{i} = mgr\,(1-\cos\theta) \tag{7}$$

e alla fine $E_\mathrm{f} = mv^2/2$ (8)

Uguagliando le energie si trova $v = [2gr\,(1 - \cos\theta)]^{1/2} = 2.29$ m/s (9)

La reazione in O è diretta nel verso positivo dell'asse y ($R_x = 0$) ed ha componente y pari a

$$R_y = mg + m\, v^2/r = 1.24 \text{ N} \qquad (10)$$

Soluzione Es. 3 - Per il principio di azione e reazione la tensione T della fune è pari a F. Se la cassa resta ferma, la forza totale agente su di essa deve essere nulla. Sulla cassa sono applicate le seguenti forze: la forza di reazione del pavimento $\boldsymbol{R} = (0, R)$, la forza di tensione $\boldsymbol{T} = (F\cos\theta, F \sin\theta)$, la forza peso $(0, -mg)$ e la forza di attrito statico $(-F_s, 0)$. Imponendo l'annullamento della forza totale si trova:

$$F\cos\theta - F_s = 0 \qquad (1)$$

$$R + F\sin\theta - mg = 0 \qquad (2)$$

Risolvendo il sistema rispetto alle incognite R e F_s si trova:

$$R = mg - F\sin\theta \qquad (3)$$

$$F_s = F\cos\theta \qquad (4)$$

Il corpo inizia a scivolare solo se $|F_s| > \mu R$ cioè se $F > \mu R/\cos\theta$. Sostituendo nell'espressione precedente il valore di R dato nella (3) si trova:

$$F > \mu mg/\cos\theta - \mu F\tan\theta \qquad \Rightarrow \qquad F > \mu mg / (\mu\sin\theta + \cos\theta) = 439 \text{ N} \qquad (5)$$

Soluzione Es.4 – Prendiamo un sistema di riferimento con asse x lungo la direzione e verso di moto e asse y perpendicolare al piano inclinato e uscente dal piano inclinato. Poiché l'attrito è maggiore sul corpo 2 di quello sul corpo 1, il corpo 1 resta sempre attaccato al corpo 2 e, quindi, i due corpi hanno la stessa accelerazione a. Indichiamo con R_1 e R_2 le reazioni del piano inclinato sui corpi 1 e 2 nel verso positivo dell'asse y e con R_{12} la reazione di 1 su 2 che è nel verso positivo dell'asse x. Per il principio di azione e reazione, la reazione di 2 su 1 è pari a $-R_{12}$. Le equazioni del moto per i corpi 1 e 2 lungo gli assi x ed y sono:

$$mg\sin\theta - R_{12} - \mu_1 R_1 = m\,a \qquad (1)$$

$$-\; mg\cos\theta + R_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_1 = mg\cos\theta \qquad (2)$$

$$mg\sin\theta + R_{12} - \mu_2 R_2 = m\,a \qquad (3)$$

$$-\; mg\cos\theta + R_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_2 = mg\cos\theta \qquad (4)$$

Sommando l'equazione (1) e (3) membro a membro e tenendo conto delle equazioni (2) e (4) si trova dopo semplici passaggi:

$$a = g\sin\theta - (\mu_1 + \mu_2)\, g\cos\theta/2 \qquad (5)$$

Sostituendo questo valore nella (3) si ottiene:

$$R_{12} = m\,(\mu_2 - \mu_1)\, g\cos\theta/2 = 1.70 \text{ N} \qquad (6)$$

Soluzione Esercizio 5 – Il lavoro totale della forza di attrito dinamico (non conservativa) è uguale alla variazione di energia meccanica. Dato che le funi sono inestensibili, uno spostamento Δx_2 del corpo 2 produce uno spostamento $\Delta x_1 = 2\,\Delta x_2$ del corpo 1 (vedi esercizio nelle dispense). Analogamente la velocità v_1 del corpo 1 è legata alla velocità del corpo 2 dalla relazione $v_1 = 2\,v_2$. Dunque, quando il corpo 2 arriva a terra, il corpo 1 si è spostato di $2h$. Di conseguenza, il lavoro fatto dalla forza di attrito sul corpo 2 è:

$$L = -2\,\mu\, mg\, h \qquad (1)$$

L'energia meccanica iniziale è $\qquad E_i = mgh + mgh_1 \qquad (2)$

dove h_1 è l'altezza del corpo 1 che resta costante. L'energia meccanica finale è:

$$E_f = mgh_1 + mv_1^2/2 + mv_2^2/2 = mgh_1 + 5mv_2^2/2 \qquad (3)$$

Applicando la legge $L = E_f - E_i$ si ottiene

$$mgh - 2\mu mg\, h = 5mv_2^2/2 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = [2gh\,(1-2\mu)/5]^{1/2} = 0 \text{ m/s} \qquad (4)$$

e, quindi $\qquad v_1 = 2\,v_2 = 0$ m/s $\qquad (5)$

In realtà la soluzione trovata sopra non ha senso fisico perché tutte le forze agenti sul sistema sono costanti e, quindi l'accelerazione dei corpi non può che essere costante. Ma se il corpo 2 parte con velocità iniziale zero e accelera con accelerazione costante non può arrivare a distanza h con velocità nulla. In effetti, per ottenere la (4) noi abbiamo fatto l'ipotesi che il corpo 2 arrivi a toccare il terreno e questo non è sempre vero. Infatti, il corpo cadrà verso il basso solo se le forze di attrito statico non sono in grado di tenere fermi i due corpi. Facciamo, quindi, l'ipotesi che i corpi siano mantenuti fermi dalle forze di attrito statico. Scrivendo le equazioni di equilibrio dei due corpi si trova rispettivamente per i corpi 1 e 2:

$$T_1 - F_s = 0 \quad \Rightarrow \quad F_s = T_1 \tag{6}$$

$$m\,g - T_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = mg \tag{7}$$

dove F_s è la forza di attrito statico e T_1 e T_2 sono le tensioni delle funi in contatto con i corpi 1 e 2. Imponendo l'equilibrio della carrucola si ottiene $T_1 = T_2 /2$ che, sostituito nella (6) porta al risultato:

$$F_s = mg/2 \tag{8}$$

La forza F_s di equazione (8) soddisfa alla condizione $|F_s| \leq \mu_s\, mg$ essendo il coefficiente di attrito statico maggiore od uguale di quello di attrito dinamico che è pari a 0.5 =1/2.
Dunque la risposta corretta al quesito è che il corpo 2 non raggiunge il pavimento ma resta fermo nella posizione iniziale.

Soluzione Es.6 – Il piano xz e il piano xy sono piani di simmetria, dunque il centro di massa deve giacere sull'intersezione di questi piani che è data dall'asse x. Conseguentemente, $y_{CM} = z_{CM} = 0$.
Il centro di massa del tratto rettilineo è in $x_1 = 0$ mentre quello del tratto semicircolare si ottiene dalla relazione generale:

$$x_2 = \frac{\int x dm}{\int dm} \tag{1}$$

Dove gli integrali sono effettuati sulla semicirconferenza. Data la simmetria circolare del profilo, conviene utilizzare coordinate polari con l'angolo θ compreso nell'intervallo [- π/2, π/2]. Con queste coordinate un punto individuato dall'angolo θ ha $x = r \cos\theta$ (2)

Si suddivide il semicerchio in tratti infinitesimi di lunghezza $dl = r\, d\theta$. Dunque, la massa infinitesima dell'elemento infinitesimo di filo è $dm = \lambda\, dl = \lambda\, r\, d\theta$ (3)
dove λ è la massa per unità di lunghezza che, per ipotesi (filo omogeneo di sezione costante) è costante. Dunque:

$$x_2 = \frac{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \lambda r^2 \cos\theta \, d\theta}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \lambda r \, d\theta} = \frac{2\lambda r^2}{\pi\lambda r} = \frac{2r}{\pi} \tag{4}$$

La coordinata x del centro di massa è, perciò,

$$x_{CM} = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1 + m_2) = m_2 x_2 /(m_1 + m_2) = 2\, m_2\, r /[\,\pi\,(m_1 + m_2)] \tag{5}$$

dove m_1 e m_2 sono, rispettivamente, le masse del tratto rettilineo e di quello semicircolare date da:

$$m_1 = 2\,\lambda\, r \qquad \text{e} \qquad m_2 = \lambda\,\pi\, r \tag{6}$$

Sostituendo le (6) nella (5) si trova, infine:

$$x_{CM} = 2\,r / (2 + \pi) = 0.0389 \text{ m} = 3.89 \text{ cm}. \tag{7}$$