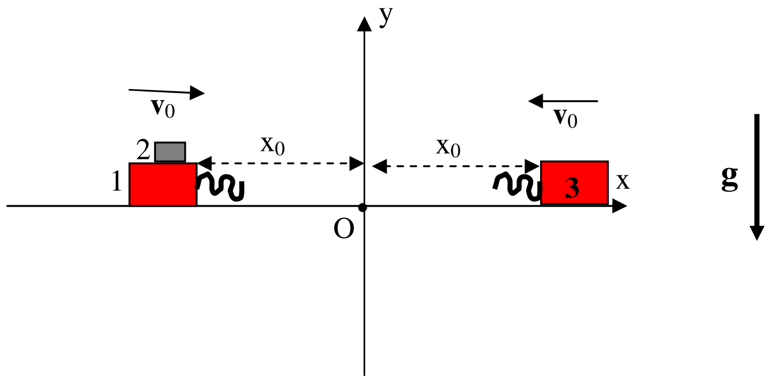
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE, CIVILE-AMBIENTALE , e EDILE. 20 Luglio 2017

Esercizio 1 - due carrellini identici (1 e 3 in figura) hanno massa m = 1 kg e al tempo t = 0 s si trovano alla stessa distanza x_0 = 1 m dal punto O come mostrato in figura. I carrelli viaggiano con velocità v_0 = 0.2 m/s <u>in versi opposti</u> su due rotaie lungo l'asse x. L'attrito esercitato dalle rotaie sui carrelli è trascurabile. Agli estremi dei carrellini si trovano delle molle con costanti elastiche uguali pari a $K = 10^2$ N/m. Un corpo 2 di massa m è appoggiato sul carrello 1 e il coefficiente di attrito statico fra i due corpi è pari a $\mu = 0.5$.

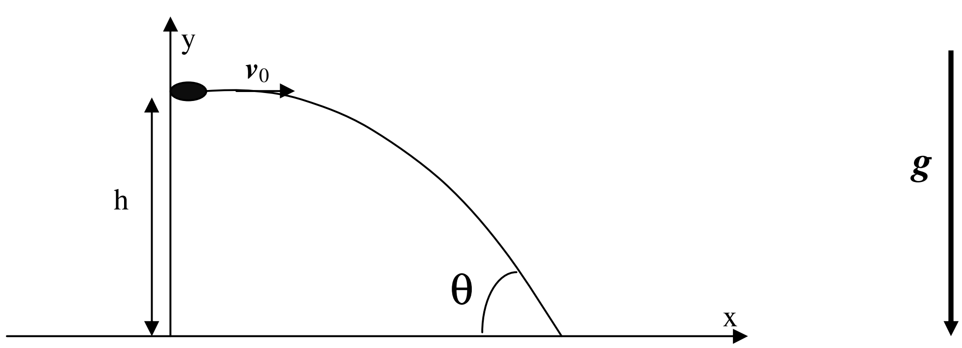


1.1 – Nell'ipotesi che il corpo 2 non scivoli mai sul corpo 1, si trovi la massima compressione Δx raggiunta da <u>ciascuna</u> molla e la velocità dei corpi nell'istante di massima compressione.

1.2 – Si trovi il valore massimo che può avere la velocità iniziale v_0 dei carrelli perché effettivamente il corpo 2 non scivoli mai sul corpo 1.

1.3 – Nell'ipotesi che la velocità sia quella del punto 1.1, cioè v_0 = 0.2 m/s, si trovi la posizione $x(t)$ del centro di massa del sistema dei tre corpi all' istante t = 10 s.

Esercizio 2 - Un proiettile viene sparato orizzontalmente con velocità v_0 = 100 m/s da un'altezza h = 50 m. Si trovi l'angolo θ con cui il proiettile incide a terra (l'angolo è quello in figura)

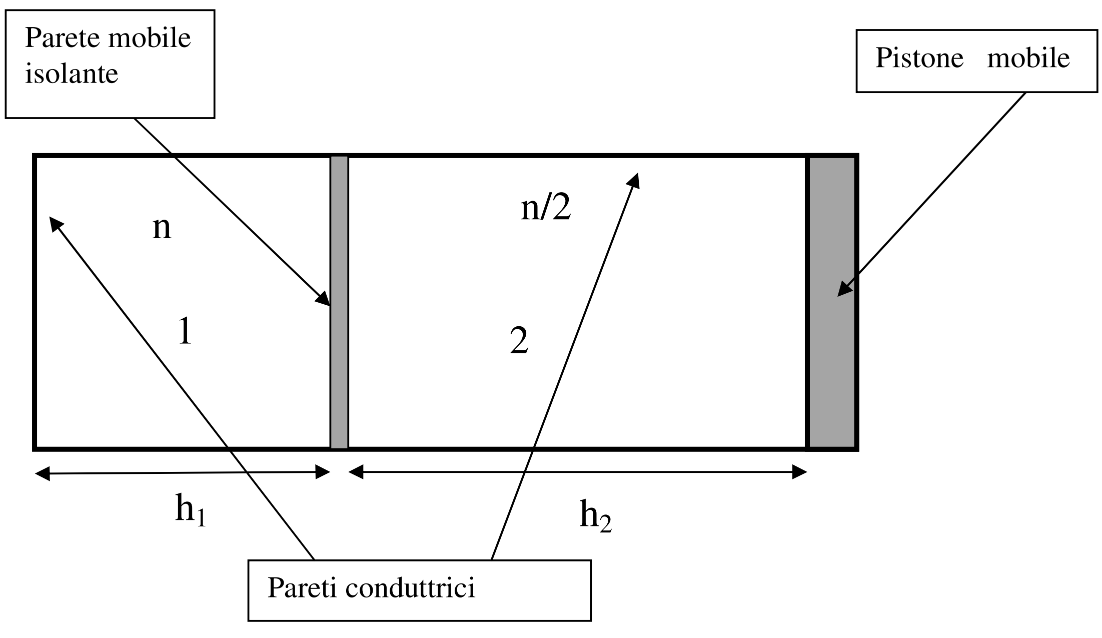


Esercizio 3 – Un cilindro conduttore termico di sezione $S = 10^{-2}$ m^2 è chiuso da un pistone mobile di massa trascurabile. All'interno del cilindro è presente una parete mobile di massa trascurabile, spessore trascurabile e termicamente isolante che può spostarsi liberamente lungo l'asse del cilindro. La parete separa due regioni del cilindro (1 e 2 in figura) riempite da uno stesso gas monoatomico ma con numeri di moli diversi e pari a $n_1 = n = 10^{-1}$ moli e $n_2 = n/2$. Il sistema è immerso in una atmosfera esterna a temperatura $T_0 = 20$ °C e a pressione $p_0 = 10^5$ Pa.

3.1- Si trovino le altezze h_1 e h_2 di figura in condizioni di equilibrio.

Ad un dato istante, un operatore esterno applica una forza aggiuntiva sul pistone in modo da comprimere il gas molto lentamente fino a dimezzare l'altezza totale ($h_1 + h_2$) del sistema.

3.2 – Si trovi il lavoro totale fatto dai gas sulla parete interna e il calore che viene scambiato dal gas nel processo e si dica se esso è assorbito dal gas o ceduto (si usi il valore $R = 8.315$ J/(K mole)).



ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es.1- 1.1 – Il corpo 2 non scivola e, quindi, le velocità dei corpi 1 e 2 sono sempre uguali ad uno stesso valore v_1. Non c'è nessuna forza esterna agente sui tre corpi lungo l'asse x, dunque, si conserva la componente x della quantità di moto totale. All'inizio la componente x della quantità di moto è mv_0, dunque durante l'urto deve essere verificata la relazione

$$2\,m\,v_1 + mv_3 = mv_0 \tag{1}$$

Nel punto di massima compressione i due carrelli hanno la stessa velocità ($v_1 = v_3$) e, quindi, la velocità di tutti e tre i corpi in tali punti ha lo stesso valore. Da eq.(1) si deduce:

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_0/3 = 0.0666 \text{ m/s} \tag{2}$$

L'unica forza non conservativa è quella di attrito statico che non compie lavoro, quindi si conserva l'energia meccanica del sistema. Inizialmente, l'energia è solo cinetica ed è pari alla somma delle energie cinetiche dei tre corpi:

$$E_i = 3\,m\,v_0^2 / 2 \tag{3}$$

Nel punto di massima compressione dove tutti i corpi si muovono con la stessa velocità in eq.(2) e le due molle sono compresse di Δx, l'energia meccanica è :

$$E_f = m\,v_0^2 / 6 \;+\; K\,\Delta x^2 \tag{4}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che i tre corpi di massa totale $3m$ si muovono con la stessa velocità $v_0/3$ (vedi eq.(2)). Uguagliando la (3) e la (4) si trova

$$\Delta x = [\,4\,m/\,(3\,K)]^{1/2}\,v_0 = 0.0231 \text{ m} = 2.31 \text{ cm} \tag{5}$$

1.2 – Quando le molle iniziano a schiacciarsi i carrelli iniziano ad accelerare (il carrello 1 rallenta mentre il 3 accelera). Se il corpo 2 resta attaccato al corpo 1, anch'esso deve accelerare con la stessa accelerazione a del carrello 1 (accelerazione negativa lungo x). L'unica forza agente sul corpo 2 lungo x è la forza di attrito statico F_s che deve, quindi, essere pari a $F_s = m\,a$. Il corpo 2 può, quindi, restare attaccato al carrello 1 solo se la forza di attrito si mantiene sempre inferiore in modulo al valore massimo consentito che è $\mu\, m\, g$. Dunque, il corpo 2 non scivola solo se $m|a| < \mu\, mg$. cioè se $|a| < \mu\, g$. Dobbiamo, quindi, calcolare l'accelerazione a dei corpi 1 e 2. Applicando la I equazione Cardinale al sistema di corpi 1 e 2 su cui l'unica forza esterna che agisce lungo l'asse x è quella della molla si trova:

$$2\;m\,a = -\;K\,\Delta x \qquad \Rightarrow \qquad a = -\,K\,\Delta x\,/\,(2\,m) \tag{6}$$

L'accelerazione è massima in modulo nel punto di massima compressione con Δx che è legato alla velocità iniziale v_0 ora incognita dalla relazione (5). Utilizzando il valore di a in eq.(6) con Δx legato a v_0 come in eq.(5) e imponendo la condizione $|a| < \mu\, g$ si trova dopo semplici passaggi:

$$\sqrt{\frac{K}{3m}}\,v_0 \;\le \mu g \qquad \Rightarrow \qquad v_0 \;\le \mu g\sqrt{\frac{3m}{K}} = 0.849 \text{ m/s} \tag{7}$$

1.3 - Poiché non ci sono forze esterne agenti sul sistema dei tre corpi lungo x, la componente x della quantità di moto totale resta sempre costante e pari al valore iniziale $P_{\text{tot x}} = mv_0$, dunque la componente x della velocità del centro di massa resta sempre costante ed uguale al valore:

$$V = P_{\text{tot x}}\,/\,3m = v_0/3 = 0.0666 \text{ m/s} \tag{8}$$

Il centro di massa si muove , quindi, di moto rettilineo ed uniforme con velocità $v_0/3$. La posizione iniziale del centro di massa al tempo $t = 0$ è individuata dalla coordinata x pari a

$X(0) = (-2\, m\, x_0 + m\, x_0) / (3\, \mathrm{m}) = -x_0/3 = -0.333$ m $\quad$ (9)

Dunque, la posizione del c.m. ad un generico istante t > 0 $\quad$ è $\quad X(\mathrm{t}) = -x_0/3 + v_0\, \mathrm{t}/3$ $\quad$ (10)

Per $t = 10$ s si trova $\quad x(10\ \mathrm{s}) = +0.333$ m

Soluzione Es.2 – Le leggi orarie del moto del proiettile lungo gli assi x ed y sono:

$$x(t) = v_0\, t \qquad (1)$$

$$y(t) = h - g\, t^2/2 \qquad (2)$$

Il proiettile arriva a terra quando $y(t) = 0$ cioè quando

$$g\, t^2/2 = h \qquad \Rightarrow \qquad t = (2\, h/g)^{1/2} \qquad (3)$$

L'angolo θ soddisfa la relazione $\quad \theta = \arctan(|v_y|/|v_x|)$ $\quad$ (4)

dove v_x e v_y sono le componenti x ed y della velocità del proiettile all'istante t in cui arriva a terra e sono date dalle relazioni:

$$|v_x| = v_0 \qquad (5)$$

$$|v_y| = g\, t = (2\, h\, g)^{1/2} \qquad (6)$$

Dunque, l'angolo θ è $\quad \theta = \arctan(|v_y|/|v_x|) = \mathrm{atan}\,[(2hg / v_0^2)^{1/2}] = 17.4\,°$ $\quad$ (7)

Soluzione Esercizio 3 – 3.1 – Il sistema si trova in equilibrio sia meccanico che termico. L'equilibrio termico ci dice che la temperatura dei gas deve essere uguale alla temperatura esterna T_0. L'equilibrio meccanico significa che le forze agenti sul pistone e sulla parete interna devono essere nulle. Dunque, la pressione del gas nel settore 2 deve eguagliare la pressione esterna, mentre le pressioni dei gas nei due settori devono essere uguali. Dunque, entrambi i gas hanno la stessa pressione p_0. Applicando la legge dei gas perfetti si trova:

$$nRT_0 /(S\, h_1) = p_0 \qquad (1)$$

$$nRT_0 /(2S\, h_2) = p_0 \qquad (2)$$

da cui si ricava $\quad h_1 = nRT_0 /(S\, p_0) = 0.244$ m $\quad$ e $\quad h_2 = h_1/2 = 0.122$ m $\quad$ (3)

3.2 - Il processo avviene molto lentamente e, quindi, può essere considerato reversibile cioè passa attraverso stati di equilibrio. Poiché la temperatura esterna resta sempre uguale a T_0, la trasformazione è isoterma reversibile. Il lavoro totale fatto dai gas è la somma dei lavori fatti dai gas sul pistone e sulla parete interna. Ad ogni istante generico le pressioni dei due gas devono essere uguali perché la trasformazione è reversibile. Utilizzando la legge dei gas perfetti si deduce che resta sempre verificata l'uguaglianza $h_2 = h_1/2$ durante l'intera trasformazione. Dunque, quando si dimezza l'altezza complessiva $h_2 + h_1$, si dimezzano anche le altezze entrambi i gas.

I lavori fatti dai gas 1 e 2 sulla parete interna sono uguali ed opposti (i gas esercitano forze uguali ed opposte sulla parete), dunque il lavoro totale fatto dai gas sulla parete interna è nullo.

L'unico lavoro risultante è quello fatto dal gas 2 in contatto con il pistone e, cioè.

$$L = \int_{V_0}^{V_0/2} p_2\, dV \qquad (4)$$

Dove dV è la variazione del volume totale $V = V_1 + V_2$ e V_0 è il volume totale iniziale dei due gas, mentre p_2 è la pressione del gas 2 che è legata al volume del gas 2 dalla relazione dei gas perfetti:

$$p_2 = nRT_0 /(2\ V_2) \qquad (5)$$

Per poter effettuare l'integrale in dV dobbiamo riuscire a riscrivere l'espressione di p_2 in termini della variabile di integrazione V. Siccome ad ogni istante deve essere verificata l'uguaglianza $h_1 = 2\ h_2$, ne consegue che il volume totale V è $V = S\ (h_1 + h_2) = 3\ S\ h_2 = 3\ V_2$, dunque si può riscrivere l'espressione di p_2 di eq.(5) sostituendo in essa $V_2 = V/3$. In tal modo si ottiene

$$p_2 = 3nRT_0 /(2\ V) \qquad (6)$$

che, sostituito nella (4) conduce al risultato

$$L = \int_{V_0}^{V_0/2} p_2\, dV = \frac{3nRT_0}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (7)$$

Si osservi che il risultato (7) è lo stesso che si avrebbe se non ci fosse stata la parete mobile. In tal caso il cilindro sarebbe riempito da $3n/2$ moli e il lavoro fatto nella isoterma sarebbe proprio quello trovato nella (7). La temperatura dei gas resta costante e, quindi, l'energia interna resta costante ($\Delta U = 0$). Per il primo principio della Termodinamica, il calore assorbito è , perciò.

$$Q = L = \frac{3nRT_0}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ 253\ \text{J} \qquad (8)$$

Il segno – indica che il calore è <u>ceduto</u> dal gas.

Osservazione importante: nel rispondere alla domanda 3.2 è stato essenziale l'osservazione che nell'espressione del lavoro in eq.(4) la pressione è quella (p_2) del gas 2 mentre dV è quello relativo al volume totale V. Intanto osserviamo che il gas a contatto con il pistone è il gas 2 e, quindi, è proprio la pressione di questo gas che spinge il pistone. Per quanto riguarda l'uso del volume totale, osserviamo che il lavoro infinitesimo fatto dal gas sul pistone è d$L = F_2$ d$x = p_2\ S$ dx dove dx è lo spostamento infinitesimo del pistone (il pistone si sposta da una posizione iniziale x ad una finale x + dx). Ma Sdx è proprio la variazione dV del volume totale V, dunque il lavoro infinitesimo è d$L = p_2$ dV. Si noti che la variazione dV_2 del volume V_2 è diversa da dV. Infatti, il volume V_2 è dato da $V_2 = S(\ x - x_1)$ dove x_1 è la posizione istantanea della parete mobile. Quando x varia di dx anche la parete mobile si sposta di una quantità dx_1 e, quindi, d$V_2 = S$ (dx – dx_1) che è diverso da d$V = S$ dx.