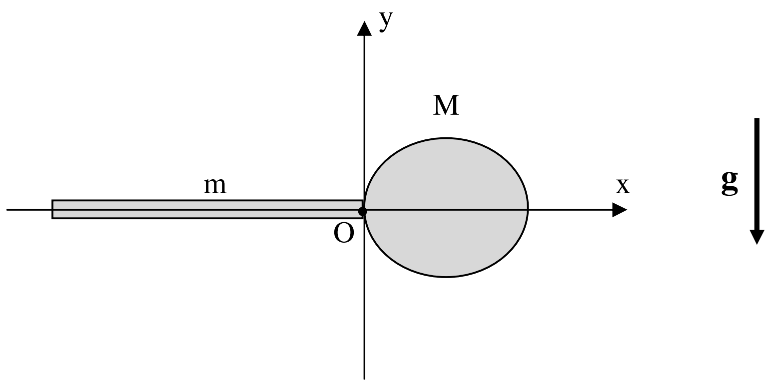
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE, CIVILE-AMBIENTALE , e EDILE. 29 Giugno 2017

Esercizio 1 - Un sistema è costituito da un'asta sottile di massa m = 1 kg e lunghezza $L = 4\ r$ = 40 cm e una sfera di raggio r = 10 cm saldate insieme nel punto O. Un'asse orizzontale uscente dal piano della figura passa per O e il sistema può ruotare senza attrito attorno a tale asse.

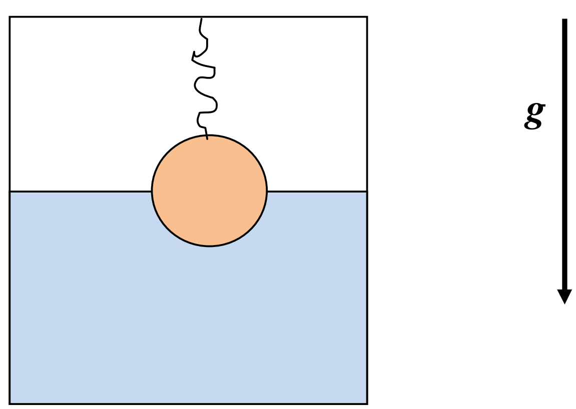


1.1 – Si trovi per quale valore della massa M della sfera il sistema resta fermo nella posizione orizzontale di figura e si dica se la posizione è di equilibrio stabile, instabile o indifferente.

1.2 – Supponendo, ora, che la massa M della sfera sia pari a $M = 4\ m$. Si dica in che verso ruota il sistema (orario o antiorario) e si calcoli l'accelerazione angolare α nell'istante iniziale in cui il sistema viene lasciato libero di ruotare partendo da fermo nella posizione di figura.

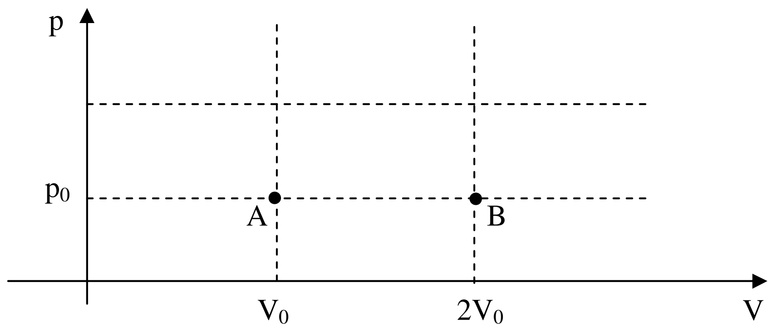
1.3 – Si calcoli la velocità angolare massima ω_{max} raggiunta dal sistema durante il suo moto e le componenti x ed y della reazione $\boldsymbol{R}$ esercitata dall'asse quando il sistema raggiunge la massima velocità angolare.

Esercizio 2 - Un corpo di massa m = 500 g e volume V = 1 litro è attaccato all'estremità di una molla di costante elastica K = 100 N/m. L'altra estremità della molla è collegata al soffitto. In condizioni di equilibrio il corpo si trova sommerso a metà in un fluido e la molla è allungata rispetto alla posizione di riposo di una quantità Δx = 3 cm.



Si calcoli la densità ρ del fluido e si trovi l'allungamento che avrebbe la molla in assenza del fluido.

Esercizio 3 – Un gas monoatomico ideale con $n = 0.1$ moli è contenuto in un cilindro e si trova inizialmente nello stato A di pressione $p_0 = 10^5$ Pa e di volume $V_0 = 10^{-3}$ m^3. Il gas compie una trasformazione reversibile secondo la legge $p(V) = a\,V^2 + b\,V + c$, dove a, b e c sono coefficienti costanti. La trasformazione finisce quando il gas si trova nello stato B con pressione p_0 e volume $2\,V_0$. Il lavoro fatto dal gas nella trasformazione è $L = 200$ J.



3.1 – Si trovino le unità di misura dei coefficienti *a, b* e *c* e si calcolino i loro valori.

3.2 – Si calcoli la temperatura massima T_{max} raggiunta dal gas durante la trasformazione.

(si usi il valore $R = 8.315$ J/(K mole))

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es.1- 1.1 – La posizione di equilibrio è quella in cui il momento totale delle forze rispetto al polo O è nullo. Prendendo come asse z l'asse ortogonale al piano di figura ed uscente, la componente z del momento di forza deve, perciò, soddisfare la relazione:

$$T_z = m\,g\,2\,r - M\,g\,r = 0 \qquad (1)$$

Dunque, l'equilibrio si ha quando $M = 2\,m = 2$ kg (2)

Per capire se l'equilibrio è stabile, instabile o indifferente conviene trovare la dipendenza dell'energia potenziale U del sistema dall'angolo θ formato dalla barra con l'asse x. θ è assunto positivo quando il sistema ruota in senso antiorario. Assumendo come 0 dell'energia potenziale la posizione di figura ($\theta = 0$), l'energia potenziale in un generico angolo θ è

$$U = M\,g\,r\sin\theta - m\,g\,2\,r\sin\theta \qquad (3)$$

Sostituendo $M = 2\,m$ in eq.(3), si trova che $U = 0$ per qualunque angolo θ. Ne consegue che l'equilibrio è indifferente, cioè il sistema resta fermo per qualunque valore dell'angolo. Alla stessa conclusione si poteva arrivare calcolando la componente z (asse perpendicolare alla figura ed uscente dal piano) del momento di forza applicato sul sistema per un generico angolo θ di inclinazione. In tal caso si trova

$$T_z = m\,g\,2\,r\cos\theta - M\,g\,r\cos\theta$$

Che risulta sempre uguale a zero se $M = 2\,m$.

1.2 – Al tempo iniziale il momento di forza applicato dalla gravità sul sistema è diretto lungo l'asse z ed ha componente z pari a

$$T_z = m\,g\,2\,r - 4\,m\,g\,r = -2\,m\,g\,r = -1.96\ \text{N m} \qquad (4)$$

Il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse z passante per O è:

$$I = \frac{m\,(4r)^2}{3} + \frac{2M\,r^2}{5} + Mr^2 = \frac{164}{15}mr^2 = 0.109\ \text{kg m}^2 \qquad (5)$$

Conseguentemente, la componente z dell'accelerazione angolare è

$$\alpha = T_z / I = -17.9\ \text{rad/s}^2 \qquad (6)$$

Dove il segno – indica che la rotazione è in VERSO ORARIO.

1.3 - La velocità angolare massima viene raggiunta quando il centro di massa del sistema si trova nella posizione più bassa, cioè quando il centro della sfera si trova sull'asse y sotto ad O. L'energia potenziale gravitazionale del sistema in questa posizione è la somma delle energie potenziali della barra e della sfera ed è pari a:

$$U = m\,g\,2\,r - M\,g\,r = -2\,m\,g\,r \qquad (7)$$

Non essendo presenti attriti, si conserva l'energia meccanica. All'inizio l'energia meccanica è nulla perché sia l'energia cinetica che quella potenziale sono nulle. Nel momento finale in cui il sistema si trova nella posizione di minima energia potenziale (eq.7), l'energia meccanica deve quindi soddisfare la relazione

$$I\,\omega^2_{\max}/2 - 2\,m\,g\,r = 0 \quad \text{, cioè,} \quad \omega_{max} = \sqrt{\frac{4\text{ m gr}}{\text{I}}} = \sqrt{\frac{15\text{ g}}{41\text{ r}}} = 5.99 \text{ rad/s} \qquad (8)$$

Dove abbiamo utilizzato l'uguaglianza $I = \frac{164}{15}\text{mr}^2$. Il centro di massa si trova a distanza dall'asse pari a

$$d = (M\,r - 2\,m\,r)/(M + m) = 2\,r/5 \qquad (9)$$

Il centro di massa compie un moto circolare attorno ad O. Nel punto più basso il centro di massa ha accelerazione tangenziale nulla e accelerazione centripeta rivolta lungo l'asse y nel verso positivo e di modulo pari a

$$a_c = \omega^2_{\max}\,d = 6\,g/41 \qquad (10)$$

Poiché l'accelerazione è diretta lungo l'asse y, la forza di reazione $\boldsymbol{R}$ esercitata dall'asse è diretta lungo lo stesso asse e, quindi, la componente x della forza di reazione è nulla. Indichiamo , quindi, con R la componente y della forza di reazione. Applicando la I equazione cardinale della dinamica dei sistemi si scrive

$$R - 5\,m\,g = 5\,m\,a_c = 30\,m\,g/41 \qquad (11)$$

e, quindi $$R = (5 + 30/41)\,m\,g = 56.2 \text{ N} \qquad (12)$$

Il segno positivo di R indica che la reazione è diretta nel verso positivo dell'asse y.

Soluzione Es.2 – Il corpo è in equilibrio, quindi, la somma delle forze esercitate su di esso è nulla. Le forze agenti (forza peso, forza elastica e forza di Archimede) sono tutte lungo l'asse verticale z. Assumendo che il verso positivo dell'asse z sia diretto verso l'alto, l'equazione dell'equilibrio è:

$$\rho\,V\,g/2 + K\,\Delta x - m\,g = 0 \qquad (1)$$

da cui si deduce

$$\rho = 2\,(mg - K\,\Delta x)/(Vg) = 388 \text{ kg/m}^3 \qquad (2)$$

Per trovare l'allungamento della molla in assenza del fluido, basta porre $\rho = 0$ nella (1). Si trova:

$$\Delta x = m\,g / K = 0.049 \text{ m} = 4.9 \text{ cm} \qquad (3)$$

Soluzione Esercizio 3 – 3.1 – $a\,V^2$, bV e c devono avere le dimensioni di una pressione, dunque le unità di misura dei coefficienti sono

$$a \text{ ----- Pa/m}^6 \quad , \quad b \text{ ------ Pa/m}^3 \quad , \quad c \text{ ----- Pa} \qquad (1)$$

Il lavoro L nell'andare da A a B è l'integrale

$$L = \int_{V_0}^{2V_0} (aV^2 + bV + c)dV = a\frac{V^3}{3} + b\frac{V^2}{2} + cV\Big]_{V_0}^{2V_0} = 7a\frac{V_0{}^3}{3} + 3\,b\frac{V_0{}^2}{2} + cV_0 \qquad (2)$$

D'altra parte, la curva $p(V)$ deve passare per i punti A e B di figura e, quindi, devono valere le condizioni

$$a\, V_0^2 + b\, V_0 + c = p_0 \qquad (3)$$
$$4a\, V_0^2 + 2b\, V_0 + c = p_0 \qquad (4)$$

Le equazioni (2) (3) e (4) costituiscono un semplice sistema di tre equazioni lineari nelle incognite a, b e c che si possono facilmente risolvere. Il risultato è:

$$a = -6\,(L - p_0 V_0)/\, V_0^3 = -\ 6\ 10^{11}\ \mathrm{Pa/m^6} \qquad (5)$$

$$b = 18\ \ (L - p_0 V_0)/\, V_0^2 = 1.8\ \ 10^9\ \mathrm{Pa/m^3} \qquad (6)$$

$$c = p_0 - 12(L - p_0 V_0)/\, V_0 = -\ \ 1.1\ 10^6\ \mathrm{Pa} \qquad (7)$$

3.2 - La temperatura del gas si ottiene dalla legge dei gas perfetti

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{aV^3 + bV^2 + cV}{nR} \qquad (8)$$

Il massimo valore (o minimo) si ottiene imponendo l'annullamento della derivata della temperatura rispetto a V. La condizione di massimo si verifica imponendo che la derivata seconda sia negativa. Facendo la derivata prima si ottiene l'equazione

$$3\, a\, V^2 + 2\, b\, V + \mathrm{c} = 0 \qquad (9)$$

Poiché la trasformazione avviene nell'intervallo di volumi compresi fra V_0 e 2 V_0, si devono scartare eventuali soluzioni della (9) esterne all'intervallo. La (9) ammette due soluzioni di cui quella che corrisponde ad un massimo ($\mathrm{d}^2T/\mathrm{d}V^2 < 0$) è

$$V_{max} = \frac{-\,b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} = 1.6236\ 10^{-3}\ \mathrm{m}^3 \qquad (10)$$

Che corrisponde alla temperatura

$$T_{max} = \frac{aV_{max}^3 + bV_{max}^2 + cV_{max}}{nR} = 470\ \ \mathrm{K} \qquad (11)$$

Osservazione: per ottenere il risultato di eq.(11) preciso al grado kelvin è necessario fare i calcoli numerici utilizzando il valore di V_{max} con tutti i contributi decimali di eq.(10).