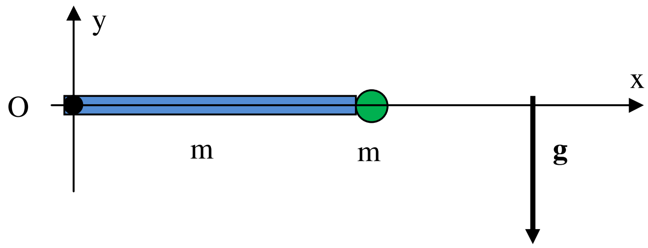
Esercizio 1

Una barra di massa m =1 kg e lunghezza L= 1 m è libera di rotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale (asse z perpendicolare al piano della figura) passante per il punto O ad un estremo della barra. All'altro estremo della barra è posto un piccolo corpo di massa m. La barra è inizialmente ferma in posizione orizzontale come mostrato in figura. Ad un dato istante t = 0 la barra viene lasciata libera di ruotare attorno all'asse.



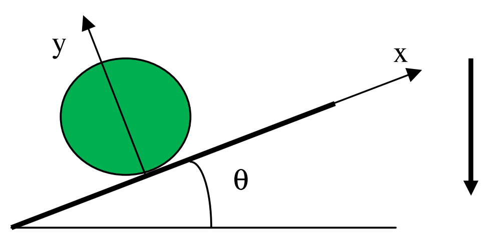
1.1- Si dica quali delle seguenti grandezze concernenti il sistema barra-corpo si conservano durante il moto successivo spiegando il motivo della risposta: 1-la quantità di moto, 2- Il momento della quantità di moto rispetto al punto O, 3- l'energia cinetica, 4- L'energia meccanica.

Si trovi la massima velocità angolare ω raggiunta dalla barra.

1.2 – Si calcolino le componenti x ed y della reazione $\boldsymbol{R}$ esercitata dall'asse sulla barra quando essa raggiunge la massima velocità angolare.

Esercizio 2

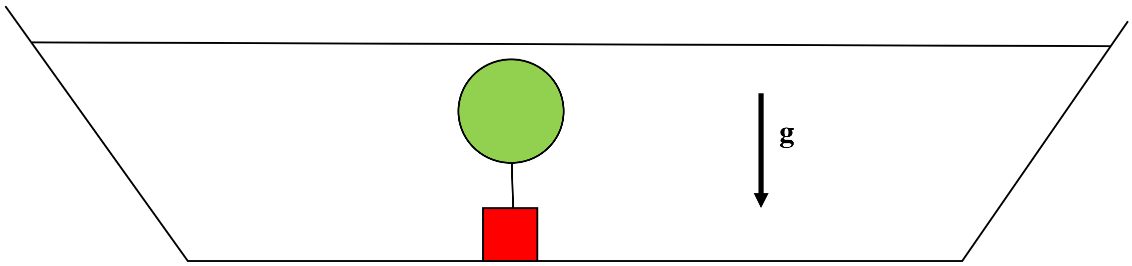
Un cilindro di raggio r = 10 cm , massa m = 1 kg si trova su un piano inclinato con angolo θ = 30°. Al tempo t = 0, sull'asse del cilindro viene applicata una *coppia di forze*(**forza totale nulla**) di momento di forza τ = 1 N m diretto perpendicolarmente al piano di figura in verso entrante.



2.1– Assumendo che il moto sia di rotolamento puro, si calcoli la velocità raggiunta dal centro di massa del cilindro dopo un tempo t = 10 s.

2.2- Sapendo che il coefficiente di attrito statico fra cilindro e piano inclinato è pari a μ = 0.5 si dica se l'ipotesi fatta in precedenza che il cilindro compia un moto di rotolamento puro è corretta.

Esercizio 3 – Un peso di massa M e volume trascurabile è posto sul fondo di un lago. Un pallone sferico gonfiabile di massa m = 100 g viene immerso nell'acqua del lago e viene collegato tramite ad una corda inestensibile di massa trascurabile al peso di massa M. Quindi, il pallone viene gonfiato e si osserva che il peso si solleva quando il raggio del pallone diventa pari a r = 20 cm. Assumendo che la massa del gas che riempie il pallone sia trascurabile, si dica quale è il valore della massa M (si assuma per la densità dell'acqua il valore $\rho = 1000$ Kg/m^3).



Esercizio 4 – Un bicchiere di capacità termica trascurabile contiene una massa M = 100 g di acqua a temperatura T_A = 20 °C. Si vuole portare l'acqua ad una temperatura T = 0 °C aggiungendo una massa m di ghiaccio inizialmente a temperatura T_G= 0 °C. Si dica quale è il minimo valore m_0 che deve avere la massa m di ghiaccio e cosa accade se $m > m_0$. Si supponga il sistema immerso in un contenitore adiabatico.
Si assuma come calore specifico del ghiaccio c_G = 500 cal/kg°C , calore latente di fusione del ghiaccio c_L= 3.33 10^5 J/kg e calore specifico dell'acqua c = 1000 cal/Kg°C.

Esercizio 5 – Una mole di gas perfetto monoatomico occupa inizialmente il volume $V_0 = 10^{-3}$ m^3 a pressione $p_0 = 10^5$ Pa. Dopodichè il gas compie una espansione secondo la legge:

$$p = p_0 + a\,(V-V_0) + b\,(V-V_0)^2$$

dove a è un coefficiente costante di valore $a = 10^8$ nel Sistema Internazionale e b è un coefficiente costante di valore $b = -\,10^{11}$ (nel Sistema Internazionale). Il valore finale di volume raggiunto nella trasformazione è $V = 2\,V_0$.

5.1- Si dica se l'espansione è reversibile, si trovino le unità di misura delle costanti a e b nel Sistema Internazionale e si calcoli il lavoro fatto dal gas nella trasformazione e il calore Q assorbito.

5.2- Si trovi il il valore massimo T_{max} della temperatura raggiunta dal gas nella trasformazione.

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es. 1- 1.1- E' presente la forza di gravità che, durante il moto, esercita momento di forza e compie lavoro. Dunque, non si conserva la quantità di moto, il momento angolare e l'energia cinetica. Poiché la forza peso è conservativa e la reazione vincolare dell'asse non fa lavoro (O e' fisso), si conserva l'energia meccanica E. Il centro di massa del sistema barra-massa si trova in un punto dell'asta a distanza $d = 3L/4$ da O. La massima velocità angolare viene raggiunta quando il centro di massa si trova nella posizione più bassa. Assumendo come zero dell'energia potenziale la posizione iniziale dell'asta, l'energia meccanica iniziale è $E_i = U_i + T_i = 0$. Nel punto più basso l'energia potenziale è negativa e pari a $U_f = -2mgd = -3\,mgL/2$ mentre l'energia cinetica è $T_f = ½\, I\, \omega^2$ dove I è il momento di inerzia del sistema barra+massa $I = mL^2/3 + mL^2 = 4mL^2/3$. Imponendo l'uguaglianza delle energie meccaniche iniziale e finale si trova:

$$\frac{2mL^2}{3}\omega^2 - \frac{3mgL}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{L}} = \ 4.70 \text{ rad/s} \tag{1}$$

1.2- La prima equazione cardinale della meccanica si scrive:

$$\vec{R} + 2m\vec{g} = 2m\vec{a}$$

Dove $\boldsymbol{R}$ è la forza esercitata dall'asse ed $\boldsymbol{a} = \omega^2 d\,\mathbf{j} = 3\omega^2 L/4\,\mathbf{j} = 27g/16\,\mathbf{j}$ è l'accelerazione del centro di massa che, nel punto più basso, è solamente accelerazione centripeta diretta dal basso verso l'alto (verso positivo dell'asse y). Il centro di massa compie un moto circolare di raggio d attorno ad O. Conseguentemente da eq.(2) si deduce

$$R_x = 0 \quad \text{e} \quad R_y = 2m\,(g + a) = 43\,mg/\,8 = 52.7 \text{ N} \tag{2}$$

Soluzione Es.2 – 2.1 - Con riferimento alla figura del testo, Le equazioni cardinali per il moto traslatorio e rotatorio sono:

$$R = mg\cos\theta \tag{1}$$

$$-mg\sin\theta + F_s = ma \qquad \Rightarrow \qquad F_s = ma + mg\sin\theta \tag{2}$$

$$\tau - F_s r = \frac{mr^2}{2}\alpha = \frac{mr}{2}a \tag{3}$$

dove F_s è la forza di attrito statico assunta diretta nel verso delle x positive. Risolvendo il sistema (1)-(3) si trova:

$$a = \frac{2\tau}{3mr} - \frac{2}{3}g\sin\theta = 3.4\ m/s^2 \tag{4}$$

$$F_s = \frac{2\tau}{3r} + \frac{1}{3}mg\sin\theta = \ 8.3 \text{ N} \tag{5}$$

La velocità raggiunta in 10 secondi è $v = a\,t = 34$ m/s (6)

2.2- Il cilindro NON SLITTA se il modulo della forza di attrito F_s non supera il massimo valore consentito pari a $\mu R = \mu\, mg\cos\theta$. Utilizzando la (5) e svolgendo i calcoli si trova:

$$\tau \le \frac{3}{2}mgr\mu\cos\theta - \frac{1}{2}mgr\sin\theta = \ 0.392 \text{ N m} \tag{7}$$

Poiché il momento di forza τ applicato è pari a 1 N m, si deduce che <u>l'ipotesi di rotolamento puro non è soddisfatta</u>.

Soluzione Es. 3 – Al momento in cui la massa inizia a staccarsi dal fondo, la tensione T della fune è praticamente uguale alla forza peso Mg. D'altra parte nelle stesse condizioni il pallone è quasi fermo e, quindi, la somma delle forze su esso applicate (tensione, peso e forza di Archimede F_A) è pari a zero Dunque,

$$T = F_A - mg = \rho Vg - mg = 327 \text{ N} \tag{1}$$

Dove $\rho = 1000$ Kg/m^3 è la densità dell'acqua e $V = 4\pi r^3/3 = \ 0.0335$ m^3 è il volume del pallone. La massa M del corpo è, perciò: $M = T/g = 33.4$ kg. (2)

Soluzione Esercizio 4 – Poiché il ghiaccio si trova inizialmente a temperatura $T_G = 0$ °C e alla fine si trova ancora a $T = 0$ °C, il calore assorbito dal ghiaccio è solamente quello di fusione pari a

$$Q_G = c_L\, m \qquad (1)$$

L'acqua, per portarsi alla temperatura di 0 gradi deve assorbire una quantità di calore pari a

$$Q_A = c\, M\, (\, 0°C - T) = -\ c\, M\, T = -\ 2000 \text{ cal} = -\ 8372 \text{ J} \qquad (2)$$

La minima quantità di ghiaccio necessaria per portare l'acqua a 0 °C si trova imponendo la condizione $Q_G + Q_A = 0$ che è verificata se la massa m di ghiaccio è pari a :

$$m = c\, M\, T/c_L = 2.54\ 10^{-2} \text{ kg} = 25.4 \text{ g.} \qquad (3)$$

Se si continua ad aggiungere ghiaccio, poiché esso si trova a 0 °C e anche l'acqua si trova a 0 °C, il ghiaccio in eccedenza non si scioglie e continua ad esistere in equilibrio con l'acqua alla temperatura di 0 °C.

Soluzione Es.5 –

5.1 - La trasformazione è reversibile perché rappresentabile come una curva continua nel piano p-V e, quindi, avviene attraverso un passaggio per stati di equilibrio in cui volume e pressione sono ben definiti. Osservando i termini nell'espressione

$$p = p_0 + a\,(V\text{-}V_0) + b\,(V\text{-}V_0)^2 \qquad (1)$$

si vede che ciascun contributo nel membro a destra deve avere le dimensioni di una pressione. Dunque:

$$a = 10^8 \text{ Pa/m}^3 \quad \text{e} \quad b = -\ 10^{11} \text{ Pa/m}^6 \qquad (2)$$

Il lavoro fatto nella trasformazione è:

$$L = \int_{V_0}^{2V_0} p(V)dV = p_0V_0 + \frac{1}{2}aV_0^2 + \frac{1}{3}bV_0^3 = 117 \text{ J} \qquad (3)$$

Il calore Q assorbito nella trasformazione si ottiene utilizzando il I Principio della Termodinamica :

$$Q = L + \Delta U. \qquad (4)$$

dove $$\Delta U = \frac{3}{2}R(T_f - T_i) = \frac{3}{2}\left[p(2V_0)2V_0 - p_0V_0\right] = \ 150 \qquad \text{J} \qquad (5)$$

Conseguentemente sostituendo nella (4) i valori dati in (3) e in (5) si ottiene

$$Q = Q = L + \Delta U = 267 \text{ J} \qquad (6)$$

5.2 – La temperatura del gas è data dalla legge dei gas perfetti: $T = p(V)\ V/R$ (7)

dove $p(V)$ è la funzione (1). La funzione $p(V)$ è rappresentata da una parabola rovesciata e si verifica immediatamente che $p(V)$ assume lo stesso valore $p\,(V) = p_0$ nello stato iniziale e in quello finale. La temperatura è massima quando la derivata dT/dV è nulla, cioè:

$$\frac{d}{dV}\left[\frac{p_0V + a(V-V_0)V + b(V-V_0)^2V}{R}\right] = \quad 0 \qquad (8)$$

Che fornisce l'equazione quadratica nell'incognita V

$$3bV^2 + \left(2a - 4bV_0\right)V + \left(p_0 - aV_0 + bV_0^2\right) = 0 \qquad (9)$$

Sostituendo i valori numerici di a, b e V_0 si trova:

$$-\ 3\ 10^{11}\ V^2 + 6\ 10^8\ V\ -\ 10^5 = 0 \qquad \Rightarrow \quad 3\ 10^6\ V^2 - 6\ 10^3\ V\ +\ 1 = 0 \qquad (10)$$

Le soluzioni di eq.(10) sono date da: $$V = 10^{-3}\left(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \qquad (11)$$

La soluzione che soddisfa la condizione $V_0 < V < 2V_0$ è quella con il segno + e corrisponde ad un massimo della temperatura:

$$V_{max} = 1.82\ 10^{-3} \qquad (12)$$

La temperatura massima è, perciò: $T_{max} = p(V_{max})\ V_{max}\,/R = \ 25.1\ \text{ K}$ (13)