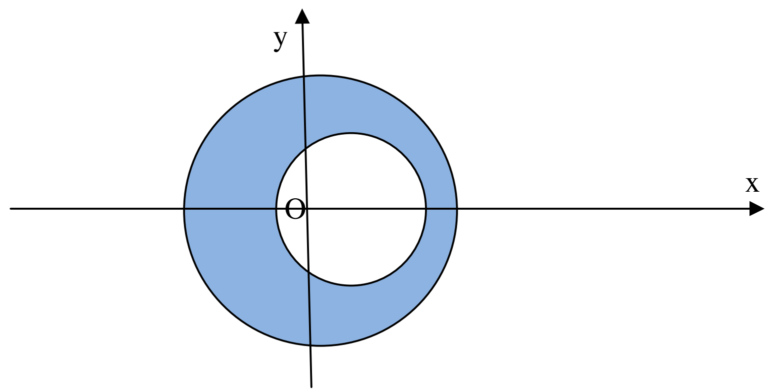
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE, CIVILE-AMBIENTALE , e EDILE. 1 FEBBRAIO 2018

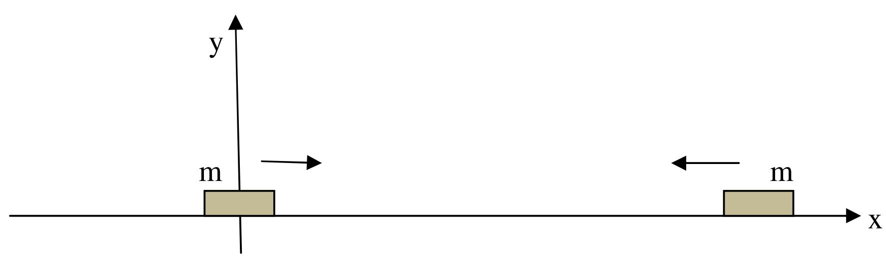
Esercizio 1 - Una sfera di raggio r = 10 cm e centro in O è costituita da un materiale omogeneo di densità ρ = 2000 Kg/m^3. All'interno della sfera c'è un buco sferico di raggio r_c = 5 cm il cui centro si trova a distanza d = 3 cm da O come mostrato in figura.



1.1 – Si trovino le coordinate x ed y del centro di massa della sfera cava.

1.2 - Si trovi il momento di inerzia rispetto all'asse x.

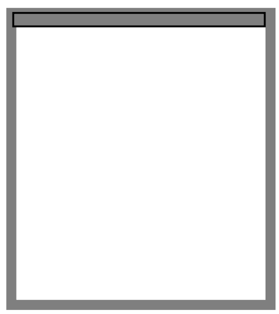
Esercizio 2 - Due auto di masse uguali e pari a m = 1000 kg viaggiano in verso opposto lungo l'asse x come mostrato in figura. L'auto 1 viaggia nel verso positivo dell'asse x con velocità di modulo $v_1 = \alpha t$ con α = 2 m/s^2 e si trova in x = 0 a t = 0. L'auto 2 viaggia in verso opposto all'asse x, ha velocità di modulo $v_2 = \beta t^3$ con β = 0.001 m/s^4 e, al tempo t = 0 si trova a distanza d = 3 km dall'auto 1.



2.1 – Si dica a quale istante le due auto si urtano e in che punto sull'asse x.

2.2 – Supponendo che l'urto fra le due auto sia totalmente anelastico, si trovi la velocità finale V delle due auto subito dopo l'urto e l'energia dissipata nell'urto.

Esercizio 3 – Un gas biatomico è contenuto in un cilindro adiabatico chiuso da un pistone adiabatico di massa trascurabile. All'esterno del cilindro è presente un'atmosfera a pressione $p_0 = 10^5$ Pa . Il gas si trova inizialmente all'equilibrio e occupa il volume $V_i = 10^{-3}$ m^3 a temperatura $T_i = 300$ K. Ad un dato istante un operatore comprime il gas in modo reversibile fino a dimezzare il proprio volume.



3.1 – Si trovi la temperatura finale raggiunta dal gas e il numero di moli presenti nel gas.

3.2 – si trovi il lavoro compiuto <u>dall'operatore</u> sul gas (lo studente tenga conto anche della presenza dell'atmosfera esterna).

(si usi il valore $R = 8.315$ J/(K mole))

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es.1- 1.1 – Una sfera piena di densità ρ, raggio r e centro O può essere pensata come la somma della sfera cava più una sferetta con densità ρ di raggio r^* che riempie interamente lo spazio vuoto all'interno della cavità sferica. Indichiamo con M_p la massa della sfera piena, con M_c la massa della sfera cava e con M_{cp} la massa della sferetta che riempie la cavità. Il centri di massa $\boldsymbol{r}_p$ della sfera piena, e quello $\boldsymbol{r}_{cp}$ della massa che riempie la cavità sono noti e coincidono con i centri delle due sfere. Dunque,

$$\boldsymbol{r}_p = (0, 0) \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{r}_{cp} = (d, 0) \tag{1}$$

D'altra parte, per le proprietà del centro di massa, vale la relazione generale:

$$\boldsymbol{r}_p = (M_c\,\boldsymbol{r}_c + M_{cp}\,\boldsymbol{r}_{cp})/(M_c + M_{cp}) \tag{2}$$

da cui si può dedurre il valore incognito del centro di massa della sfera cava

$$\boldsymbol{r}_c = [(M_c + M_{cp})\;\boldsymbol{r}_p - M_{cp}\,\boldsymbol{r}_{cp}]/M_c \tag{3}$$

Sostituendo nella (3) i valori noti in (1) si trova

$$\boldsymbol{r}_c = -\,(M_{cp}\,\boldsymbol{r}_{cp})/M_c = -\,(M_{cp}\,d\,/\,M_c\,,\,0) \tag{4}$$

D'altra parte $M_{cp} = \rho\,4\pi r^{*3}/3 = 1.05$ kg e $M_c = \rho\,4\pi(r^3 - r^{*3})/3 = 7.33$ kg (5)

Sostituendo questi valori nella (4) insieme a $d = 0.03$ m, si trova

$$\boldsymbol{r}_c = (-\,0.0043 \text{ m}, 0 \text{ m}) = (-\,4.3 \text{ mm}, 0 \text{ mm}) \tag{6}$$

1.2- Il momento di inerzia della sfera piena di raggio r può essere pensato come la somma dei momenti di inerzia della sfera che riempie la cavità sferica e della sfera cava. Dunque

$$I_p = I_c + I_{cp} \quad \text{da cui si deduce} \quad I_c = I_p - I_{cp} \tag{7}$$

Ma i momenti di inerzia della sferetta nella cavità e della sfera piena rispetto all'asse x che passa per i loro baricentri è noto e pari a.

$$I_p = 2M_p\,r^2/5 = 8\,\rho\,\pi\,r^5/15 \qquad \text{e} \qquad I_{cp} = 2\,M_{cp}\,r^{*2}/5 = 8\,\rho\,\pi\,r^{*5}/15 \tag{8}$$

dunque $I_c = I_p - I_{cp} = 8\,\rho\,\pi\,(r^5 - r^{*5})/15 = 0.0325$ kg m^2 (9)

Soluzione Es.2.1 – La posizione dell'auto 1 al tempo t è data da

$$x_1 = \int_0^t \alpha t dt = \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{1}$$

Mentre quella dell'auto 2 è

$$x_2 = d - \int_0^t \beta t^3 dt = d - \frac{1}{4}\beta t^4 \tag{2}$$

Le auto si incontrano se $x_1 = x_2$, cioè se è verificata l'equazione

$$\beta t^4 /4 + \alpha t^2/2 - d = 0 \tag{3}$$

che ammette come unica soluzione significativa

$$t^2 = [- \alpha/2 + ((\alpha/2)^2 + \beta d)^{1/2}] / (\beta/2) = 2000 \text{ s}^2 \tag{4}$$

da cui si deduce che il tempo di impatto è

$$t = t_0 = 44.7 \text{ s} \tag{5}$$

L'urto avviene, perciò, nel punto di coordinata $x = \alpha t^2 /2 = 2000$ m (6)

2.2- Nell'urto si conserva la quantità di moto totale che al momento immediatamente prima dell'urto ($t = t_0$) ha solo componente x pari a

$$p_i = m\, \alpha t_0 - m\, \beta t_0^3 = m\, t_0 (\alpha - \beta t_0^2) = 0 \quad \text{kg m/s} \tag{7}$$

dunque, subito dopo l'urto deve valere la relazione $2\, m\, V = 0$ da cui $V = 0$ m/s (8)

L'energia finale è, quindi nulla e tutta l'energia che le auto avevano subito prima dell'urto si dissipa nell'urto. Dunque,

$$E_{\text{diss}} = m\, (\alpha^2\, t_0^2 /2 + \beta^2\, t_0^6 /2) = 8\; 10^6 \text{ J} \tag{9}$$

Soluzione Esercizio 3 – 3.1 – Il gas biatomico compie una trasformazione adiabatica reversibile e il volume iniziale V_i e finale V_f sono legati alla temperatura iniziale T_i e a quella finale T_f dalla relazione

$$(T_i /T_f)^{5/2} = V_f/V_i \tag{1}$$

Da cui si deduce immediatamente

$$T_f = T_i\, (V_i /V_f)^{2/5} = 1.32\, T_i = 396 \text{ K} \tag{2}$$

Poiché il gas è inizialmente in equilibrio, la sua pressione è $p_i = p_0$ e il numero di moli deve soddisfare l'equazione di stato, cioè

$$n = p_i\, V_i / (R\, T_i) = 0.0401 \text{ moli} \tag{3}$$

3.2 - In una adiabatica il calore assorbito è nullo e quindi, per il I principio della Termodinamica, il lavoro totale fatto sul gas è pari alla variazione di energia interna. Dunque

$$L_{\text{tot}} = 5\, n\, R\, (T_f - T_i) / 2 = 80 \text{ J} \tag{4}$$

Nella trasformazione la pressione esterna fa un lavoro <u>positivo</u>

$$L_p = p_0\, (V_i - V_i/2) = 50 \text{ J} \tag{5}$$

Dunque, il lavoro dell'operatore è $L_{op} = L - L_p = 30$ J (6)