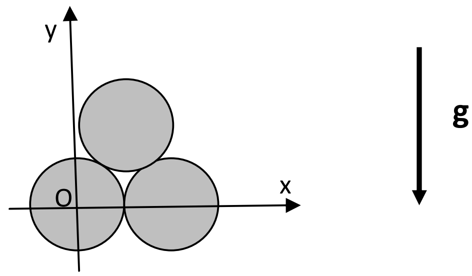
I I Compitino Fisica Generale I Ingegneria Civile, ambientale ed Edile. 2018.

Esercizio 1- Un sistema è costituito da tre sfere di raggio r = 5 cm e massa m = 2 kg saldate insieme come mostrato in figura.

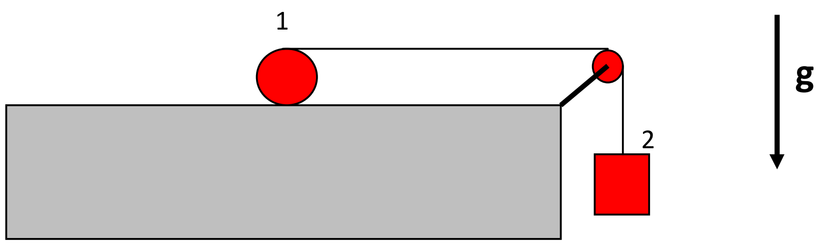


1.1 - Si trovino le coordinate x , y e z del centro di massa (l'asse z è l'asse perpendicolare alla figura, passante per l'origine O degli assi x ed y e uscente dalla figura).

1.2 – Si calcoli il momento di forza (direzione, verso e modulo) esercitato dalla forza peso rispetto al polo O nell'origine degli assi e il momento di forza rispetto al centro di massa del sistema.

1.3 – Si calcolino i momenti di inerzia I_x , I_y e I_z del sistema rispetto agli assi x , y e z).

Esercizio 2 – Su un cilindro (1) di massa m = 3 kg e raggio r = 10 cm è avvolta una fune inestensibile e di massa trascurabile che si appoggia su una carrucola di massa trascurabile e priva di attrito. L'altra estremità della fune è collegata ad un secondo corpo 2 di massa m identica che si trova inizialmente fermo ad altezza h = 2 m dal pavimento. Assumendo che il moto del cilindro sia di rotolamento puro e che la fune non scivoli sul cilindro, si calcoli:



2.1 – La velocità angolare ω del cilindro quando il corpo 2 tocca terra.

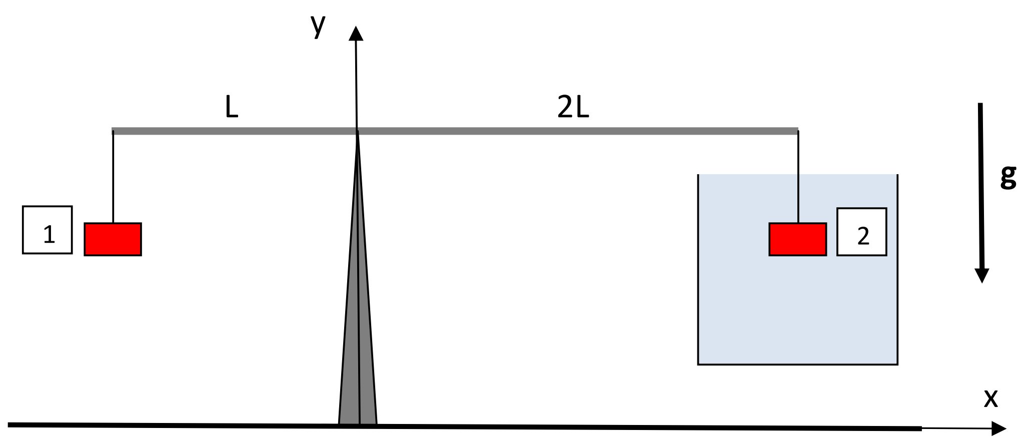
2.2 – Le tensioni T_1 e T_2 degli spezzoni di funi in contatto con il corpo 1 e con il corpo 2 durante il moto di rotolamento.

Esercizio 3 – Una bilancia ha due bracci di lunghezza, rispettivamente, L e $2\ L$ ai cui estremi si trovano due funi inestensibili e di massa trascurabile a cui sono collegati due corpi identici 1 e 2 di massa m = 2 kg e volume $V = 2\ 10^{-3}$ m^3. Il corpo 2 è immerso interamente in una bacinella che contiene un liquido incognito. Si osserva che il sistema è in equilibrio nella posizione di figura.

Assumendo trascurabili le masse dei due bracci della bilancia,

3.1 - si calcoli la densità ρ del fluido e le componenti x ed y della reazione $\boldsymbol{R}$ esercitata dal cuneo sui bracci della bilancia.

3.2 – Si supponga,ora, che i bracci della bilancia siano omogenei e che la massa totale dei due bracci sia pari a M = 1 kg. Si trovi per quale valore della densità del fluido il sistema è in equilibrio.



Esercizio 4 – Una mole di gas perfetto <u>biatomico</u> si trova inizialmente a pressione $p_0 = 10^{5}$ Pa e occupa un volume $V_0 = 10^{-2}$ m^3 (punto A in un diagramma p-V). Il gas compie una trasformazione adiabatica reversibile fino a raddoppiare il volume. Dopodiché torna nella posizione iniziale compiendo prima una trasformazione isocora reversibile e poi una isobara reversibile.

4.1 – Si trovi la minima temperatura $T_{\min}$ raggiunta nel ciclo e si dica se il sistema opera come motore o pompa di calore.

4.2 – si trovi il calore totale Q assorbito nel ciclo.

(per i calcoli numerici si usi il valore della costante dei gas R = 8.315 J / (K mole))

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es. 1: **1-1** -Per simmetria, il centro di massa giace sull'asse parallelo all'asse y e passante per il centro della sfera in alto e per il punto di contatto fra le sfere in basso. Dunque,

$$x_{CM} = r = 0.05 \text{ m} \qquad (1)$$

$$z_{CM} = 0 \text{ m} \qquad (2)$$

La componente y si ottiene dalla relazione

$$y_{CM} = (m\, y_1 + m\, y_2 + m\, y_3) / (3\, m) = y_3/3 \qquad (3)$$

dove $y_1= 0$ m , $y_2 = 0$ m e y_3 sono le coordinate y dei centri delle tre sfere. I centri delle sfere stanno su un triangolo equilatero di lato $L = 2\, r$ e, quindi, $y_3 = 2\, r \sin 60° = (3)^{1/2}\, r$ che, sostituito nella (3) fornisce

$$y_{CM} = r / (3)^{1/2} = 0.0289 \text{ m} = 2.89 \text{ cm} \qquad (4)$$

1.2 – Il momento di forza è diretto perpendicolarmente al piano di figura in verso entrante. Il modulo τ del prodotto di forza è pari al modulo $3\, m\, g$ del peso totale che è applicato nel centro di massa moltiplicato per il braccio che è pari a $x_{CM} = r$. Dunque,

$$\tau = 3\, m\, g\, r = 2.94 \text{ N m} \qquad (5)$$

La forza peso totale agente sul sistema di corpi è applicata nel centro di massa del sistema. Di conseguenza, il braccio di questa forza rispetto al centro di massa è nullo e, quindi, il corrispondente momento di forza è nullo.

1.3 – Il momento di inerzia è la somma dei momenti di inerzia delle singole sfere che possono essere calcolati utilizzando il teorema degli assi paralleli. Dunque:

$$I_x = 2\, m\, r^2 /5 + 2\, m\, r^2 /5 + [2\, m\, r^2 /5 + 3\, m\, r^2] = 21\, m\, r^2 / 5 = 0.021 \text{ Kg m}^2 \qquad (6)$$

$$I_y = 2\, m\, r^2 /5 + (2\, m\, r^2 /5 + 4\, m\, r^2) + (2\, m\, r^2 /5 + m\, r^2) = 31\, m\, r^2 / 5 = 0.031 \text{ Kg m}^2 \qquad (7)$$

$$I_z = 2\, m\, r^2 /5 + (2\, m\, r^2 /5 + 4\, m\, r^2) + (2\, m\, r^2 /5 + 4\, m\, r^2) = 46\, m\, r^2 / 5 = 0.046 \text{ Kg m}^2 \qquad (8)$$

Soluzione Es.2 : **2.1** – Nel moto di rotolamento puro si conserva l'energia meccanica del sistema perché le forze non conservative di attrito statico e di reazione normale non compiono lavoro. Assumendo come zero dell'energia potenziale gravitazionale quella corrispondente al corpo 2 che è a terra, l'energia iniziale è

$$E_i = m\, g\, h \qquad (1)$$

Alla fine, quando il corpo 2 è a terra, l'energia è solo cinetica ed è pari a

$$E_f = m\, v_1^2 /2 + m v_2^2 /2 + I\, \omega^2 /2 \qquad (2)$$

Dove v_1 è la velocità del *C.M.* del corpo 1, v_2 quella del corpo 2 e ω è la velocità angolare del cilindro. $I = m\, r^2 /2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo asse. La presenza della corda inestensibile implica che il punto in alto del cilindro a contatto con la corda deve avere la stessa velocità v_2 del corpo 2. D'altra parte, nel moto di rotolamento, la velocità del punto più alto del cilindro è doppia della velocità del suo centro di massa. Di conseguenza

$$v_2 = 2\, v_1 \qquad (3)$$

Inoltre vale anche la relazione del rotolamento puro $v_1 = \omega r$ (4)

e, quindi, $v_2 = 2\, \omega r$ (5)

Sostituendo la (4) e la (5) nella (2) e imponendo l'uguaglianza $E_f = E_i$, si trova

$$\omega = [\, (4\, g\, h\,) \,/\, (11\, r^2\,)]^{1/2} = 26.7 \text{ rad/s} \qquad (6)$$

2.2 - Poiché la carrucola ha massa trascurabile, le tensioni T_1 e T_2 nei due spezzoni a contatto con i corpi 1 e 2 sono uguali e, quindi, si può porre

$$T_1 = T_2 = T \qquad (7)$$

Le equazioni per i moti di traslazione dei corpi 1 e 2 sono

$$T - F_s = m\, a_1 \qquad (8)$$

$$mg - T = m\, a_2 \qquad (9)$$

dove F_s è la forza di attrito statico che abbiamo assunto positiva nel verso opposto al moto. D'altra parte, $v_2 = 2\, v_1$ e, quindi, $a_2 = 2\, a_1$. Dunque, la (9) può essere scritta nella forma

$$mg - T = 2\, m\, a_1 \qquad (10)$$

L'equazione per il moto di rotazione del cilindro è

$$T\, r + F_s\, r = m\, r^2\, \alpha /2 \qquad (11)$$

Ma, per un moto di rotolamento puro, vale la relazione $\alpha = a_1 / r$ e, quindi, la (11) diventa:

$$T + F_s = m\, a_1/2 \qquad (12)$$

Il sistema di equazioni (8), (10) e (12) ammette come soluzione:

$$a_1 = 4\, g/11 = 3.56 \text{ m/s}^2 \quad , \quad T = 3\, m\, g\,/11 = 8.02 \text{ N} \quad \text{e} \quad F_s = -\, m\, g\,/11 = -\, 2.67 \text{ N} \qquad (13)$$

Il segno – nell'espressione della forza di attrito statico significa che essa è diretta in verso opposto a quello da noi assunto come positivo e, quindi, è in realtà diretta nel verso del moto del cilindro.

Soluzione Esercizio 3 : **3.1** - Le tensioni delle due funi devono equilibrare le altre forze agenti sui corpi 1 e 2. Sul corpo 1 agisce solo la forza di gravità mentre sul 2 agisce anche la forza di Archimede. Dunque,

$$T_1 = mg \qquad \text{e} \qquad T_2 = mg - \rho\, V\, g \qquad (1)$$

D'altra parte il momento di forza totale applicato sui bracci della bilancia dal cuneo e dalle tensioni deve essere pari a zero. Se prendiamo come polo il punto di contatto fra cuneo e bilancia, il momento della forza esercitata dal cuneo è nullo (il braccio è zero). Inoltre, i bracci della bilancia hanno masse trascurabili e, quindi, anche i momenti delle forze peso agenti sui bracci possono essere trascurate. Dunque, restano solo i momenti esercitati dalle tensioni. Imponendo che il momento totale delle forze esercitate dalle tensioni sia nullo si trova

$$T_1\, L \;=\; T_2\, 2L \quad , \quad \text{cioè} \qquad T_1 \;=\; 2\, T_2 \tag{2}$$

Sostituendo nella (2) i valori di T_1 e T_2 dati nelle (1), dopo semplici passaggi si trova:

$$\rho = m \,/\, (2\, V) = 500 \text{ Kg /m}^3 \tag{3}$$

Poiché il sistema è in equilibrio, la forza totale sui bracci della bilancia deve essere nulla, cioè:

$$\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{R} = 0, \text{ da cui} \qquad \boldsymbol{R} = -\, \boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_2 \tag{4}$$

Ma $\quad \boldsymbol{T}_1 = (\,0, -\,mg) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T}_2 = (\,0, -\,mg/2)$ (5)

Dunque, $\quad \boldsymbol{R} = (\,0,\; 3\, m\, g\, /2) = (\,0 \text{ N}, 29.4 \text{ N})$ (6)

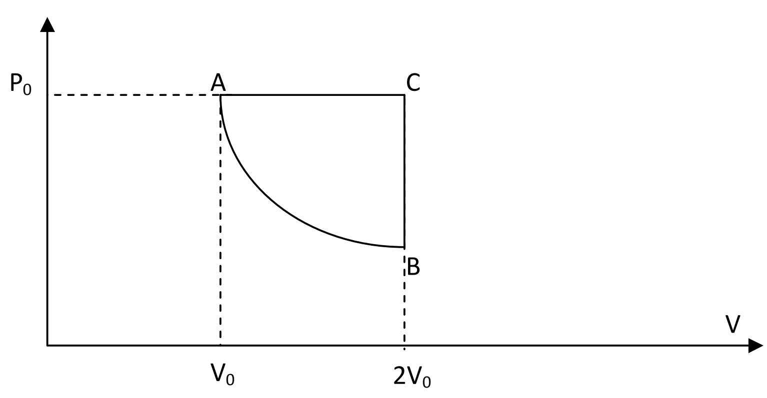
3.2 - In questo caso la (1) resta valida ma la (2) deve essere modificata perché agiscono anche le forze peso dei due bracci della bilancia che sono applicate nei rispettivi centri di massa. Poiché l'asta è omogenea e le lunghezze dei due bracci sono L e $2\,L$, la massa del braccio lungo (braccio 2) è il doppio di quella del braccio corto (braccio 1). Dunque, poiché la massa totale è M, i due bracci hanno masse $M_1 = M/3$ e $M_2 = 2\, M/3$. Le rispettive forze peso sono applicate nei corrispondenti centri di massa a distanza $d_1 = L/2$ e $d_2 = L$ dal vertice del cuneo. L'equilibrio dei momenti di forza si scrive, ora, nella forma:

$$(T_1 + M\, g/6)\, L \;=\; (T_2 + 2\, M\, g/3)\, L \quad , \quad \text{cioè} \qquad T_1 \;=\; 2\, T_2 \;+ Mg/2 \tag{7}$$

Sostituendo nella (7) i valori di T_1 e T_2 dati nella (1) e svolgendo semplici calcoli algebrici si trova

$$R = (\, m + M/2)\, /(2\, V) = 625 \text{ Kg /m}^3 \tag{8}$$

Soluzione Es. 4 – **4.1** – Il ciclo ha la forma qualitativa mostrata in figura. La temperatura più bassa viene raggiunta nel punto in cui è minimo il prodotto $p\, V$, cioè nel punto B alla fine dell'adiabatica reversibile.



Nell'adiabatica la temperatura e il volume sono legati dalla relazione

$$T_B = T_A \, (V_A/V_B)^{2/\gamma} \qquad (1)$$

Dove $\gamma = 5$ è il numero di gradi di libertà . D'altra parte, la temperatura T_A si ottiene dalla legge dei gas perfetti

$$T_A = p_0 \, V_0 \, / \, R = 120.3 \text{ K} \qquad (2)$$

Sostituendo questo valore insieme a $V_A / V_B = ½$ nella (1) si trova:

$$T_B = 91.1 \text{ K} \qquad (3)$$

Il ciclo viene percorso in verso antiorario e, quindi, il lavoro fatto dal gas è negativo. Ne consegue che il sistema si comporta come pompa di calore.

4-2 : Il calore totale assorbito è la somma dei calori assorbiti nelle singole trasformazioni. Nella adiabatica il calore assorbito è nullo e, quindi, gli unici calori vengono assorbiti nell'isocora (*BC*) e nell'isobara (*CA*) che sono :

$$Q_{\text{isocora}} = C_v \, (T_C - T_B) = 5 \, R \, (T_C - T_B) \, / \, 2 \qquad (4)$$

$$Q_{\text{isobara}} = C_p \, (T_A - T_C) = 7 \, R \, (T_A - T_C) \, / \, 2 \qquad (5)$$

Le temperature T_A e T_B sono date in eq.(2) e (3) mentre la temperatura T_C del punto *C* si ottiene dalla legge dei gas perfetti:

$$T_C = 2p_0 \, V_0 \, / \, R = 240.5 \text{ K} \qquad (6)$$

Sostituendo li valori di T_A, T_B e T_C in eq.(4) e (5) si trova:

$$Q_{\text{isocora}} = 3106 \text{ J} \qquad (7)$$

$$Q_{\text{isobara}} = - 3498 \text{ J} \qquad (8)$$

Il calore totale è, perciò: $Q = - 392$ J (9)