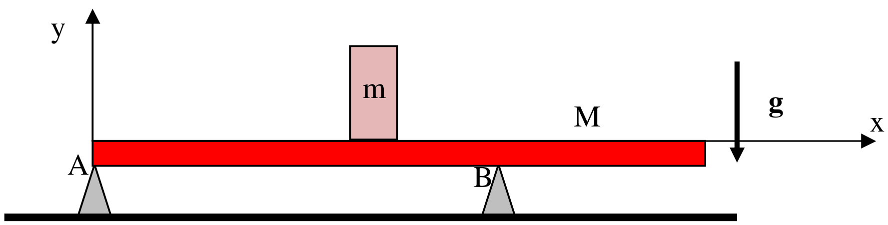
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE, CIVILE-AMBIENTALE , e EDILE. 28 Giugno 2018

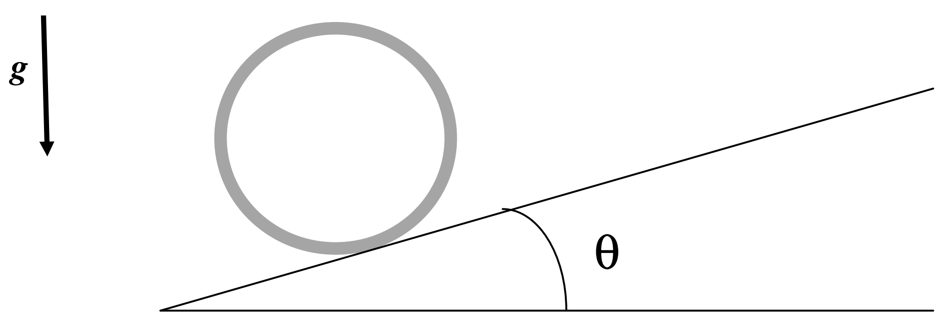
Esercizio 1 – Una trave di lunghezza L = 6 m e massa M = 40 kg è appoggiata su due sostegni nei punti A e B posti a distanza h = 2L/3 l'uno dall'altro. Una persona di massa m = 80 kg si sposta lungo la trave partendo da A. Assumendo che le forze di reazione esercitate dai sostegni siano dirette lungo l'asse verticale y,



1.1 – si trovi fino a quale massima distanza x_0 da A può arrivare la persona prima che la trave inizi ad inclinarsi e si trovino i valori delle reazioni R_A e R_B in tale posizione (6 punti)

1.2 – Si trovino i valori delle reazioni R_A e R_B quando la persona si trova in A. (4 punti)

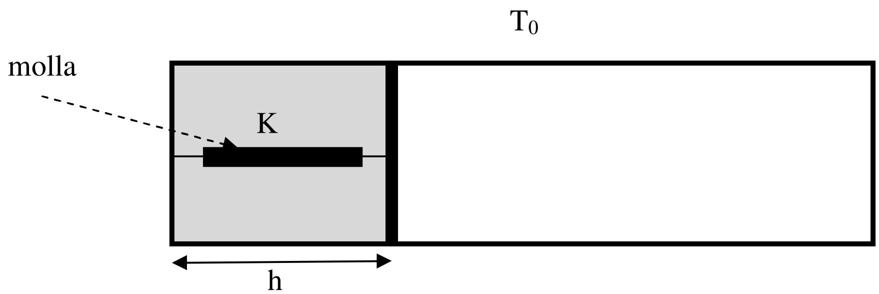
Esercizio 2 – Un **<u>tubo</u>** cilindrico omogeneo di spessore trascurabile ha massa m = 100 g e raggio r = 3 cm ed ha il centro di massa inizialmente ad altezza z = 0. Il tubo viene viene lanciato con velocità v_0 = 10 m/s lungo un piano inclinato con angolo di inclinazione θ = 30°.



2.1 – Si trovi la massima altezza h raggiunta dal centro di massa e il modulo dello spostamento del centro di massa nei due casi : a) rotolamento puro ideale, b) scivolamento puro (<u>attrito nullo</u>). (5 punti)

2.2- Si trovi il tempo impiegato dal guscio cilindrico per raggiungere il punto di massima altezza nei due casi a) e b) del punto precedente e si dica, giustificando la risposta, in quale caso (a o b) la velocità con cui la sfera torna nella posizione iniziale è maggiore. (5 punti).

Esercizio 3 – Un cilindro chiuso su entrambe le superfici di base è disposto orizzontalmente ed ha sezione interna $S = 10^{-2}$ m^2. Una parete mobile divide il il cilindro in due parti. Nella parte a sinistra sono presenti $n = 10^{-1}$ moli di gas perfetto monoatomico mente quella a destra è vuota. Le pareti sono conduttrici termiche e l'ambiente esterno si trova a temperatura T_0 = 300 K. Una molla di costante elastica $K = 10^4$ N/m e lunghezza a riposo L = 10 cm collega la parete a sinistra con la parete mobile.



3.1 – Si trovi l'altezza *h* in figura in condizioni di equilibrio (5 punti).

La temperatura esterna varia molto lentamente fino a raggiungere il valore 2 T_0.

3.2 – Si trovi il lavoro *L* fatto dal gas e il calore *Q* assorbito dal gas. (5 punti)

(si usi il valore R = 8.316 J/ (mole K) per la costante dei gas)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1.1- Il sistema resta in equilibrio finché la coordinata x_{CM} del centro di massa del sistema trave-uomo resta compresa fra i punti di appoggio $x_A = 0$ e $x_B = 2L/3$. Imponendo la condizione $x_{CM} \leq 2L/3$ si trova

$$x_{CM} = \frac{mx+ML/2}{m+M} \leq \frac{2}{3}\, L \qquad \Rightarrow \qquad x \leq \frac{2L}{3} + \frac{ML}{6m} = x_0 = 4.5 \text{ m} \tag{1}$$

Quando $x = x_0$, il centro di massa del sistema ha coordinata $x_{CM} = 2L/3 = x_B$, dunque il momento di forza risultante esercitato dalla forza peso totale che è applicata nel centro di massa e dalla reazione R_B rispetto a B è nullo (i bracci delle forze sono nulli). Di conseguenza il momento di forza rispetto a B è dovuto solamente a R_A e deve essere nullo perché il sistema è in equilibrio. Ne consegue che

$$R_A = 0 \text{ N} \tag{2}$$

Il valore di R_B si trova imponendo che la forza totale sia nulla, cioè

$$R_B = mg + Mg = 1176 \text{ N} \tag{3}$$

METODO ALTERNATIVO: Perché vi sia equilibrio, la componente z (asse entrante nel piano della figura) del momento di forza totale τ rispetto a qualunque punto deve essere nulla. Se prendiamo come polo il punto A, si trova

$$M\, g\, L/2 + m\, g\, x - R_B\, 2\, L/3 = 0 \tag{4}$$

Da cui $\quad R_B = 3\, m\, g\, x\, /(2\, L) + 3\, M\, g/4 \qquad (5)$

Che, come si verifica immediatamente è sempre positiva per x > 0. Imponendo l'equilibrio delle forze si trova

$$R_A = m\, g + M\, g - R_B = m\, g + M\, g/4 - 3\, m\, g\, x\, /(2L) \tag{6}$$

R_A rappresenta una reazione normale e, quindi, deve essere sempre positiva. Imponendo la condizione $R_A \geq 0$, in eq.(6), si trova, dopo semplici passaggi,

$$x \leq x_0 = 2\, L/3 + M\, L\, /(6m) \tag{7}$$

che coincide con la relazione (1). Sostituendo nelle (5) e (6) il valore $x = x_0$ (con x_0 definito nella (7)) si ritrovano i risultati delle equazioni (2) e (3) per R_A e R_B.

1.2- Quando la persona si trova in A, la forza peso della persona e la reazione in A hanno braccio nullo rispetto ad A e, quindi, non contribuiscono al momento di forza rispetto al polo A che deve essere nullo essendo il sistema in equilibrio. La componente z del momento di forza rispetto al polo A è, quindi, data da:

$$\tau_{Az} = -2\, R_B\, L/3 + M\, g\, L/2 = 0 \tag{8}$$

da cui si deduce $\quad R_B = 3\, M\, g\, /\, 4 = 294 \text{ N} \qquad (9)$

R_A si ottiene dall'equilibrio delle forze

$$R_A = m\, g + M\, g - R_B = m\, g + M\, g/4 = 882 \text{ N} \tag{10}$$

Soluzione Esercizio 2- 2.1- In entrambi i casi si conserva l'energia meccanica che inizialmente è solo cinetica e alla fine (quando raggiunge la massima altezza) è solo potenziale e pari a

$$U = m\, g\, h \tag{1}$$

in entrambi i casi. Il momento di inerzia di un guscio cilindrico di raggio r rispetto al centro di massa è

$$I = m\, r^2 = 9 \; 10^{-5} \text{ Kg m}^2 \tag{2}$$

L'energia cinetica iniziale nel caso a) (rotolamento puro) è

$$K(a) = m\, v_0^2/2 + I\, \omega^2 /2 = m v_0^2 = 10 \text{ J} \tag{3}$$

dove l'ultimo termine a destra è stato ottenuto sostituendo l'espressione di I di eq. (2) e utilizzando la relazione del rotolamento puro $\omega = v_0 / r$. Nel caso b), invece , l'energia cinetica è solo di traslazione e pari a

$$K(b) = m\, v_0^2/2 = 5 \text{ J} \tag{4}$$

Imponendo l' uguaglianza fra ciascuna delle energie cinetiche iniziali di equazioni (3) e (4) e l'energia gravitazionale finale di equazione (1) si trova:

caso a) $$h(a) = v_0^2/g = 10.2 \text{ m} \tag{5}$$

caso b) $$h(b) = v_0^2/(2\, g) = 5.10 \text{ m} \tag{6}$$

I moduli del vettore spostamento sono legati all'altezza raggiunta dalla relazione $s = h/\sin\theta$, dunque

Caso a: $s(a) = h(a) /\sin\theta = 20.4$ m , **Caso b**: $s(b) = h(\mathrm{b}) /\sin\theta = 10.2$ m (7)

2.2 – caso a) (rotolamento puro). In questo caso, le equazioni (I e II Cardinale) prendendo come polo il centro di massa si scrivono (si assume la forza di attrito statico orientata verso il basso e che il verso positivo di rotazione sia quello orario):

$$- F_s - m\, g \sin\, \theta = ma \tag{8}$$

e

$$F_s\, r = I\, \alpha = m\, a\, r \quad \Rightarrow \quad F_s = m\, a \tag{9}$$

Risolvendo il sistema di equazioni lineari nelle incognite a e F_s, si ottiene

$$a = - (g \sin\, \theta)/2 \tag{10}$$

L'accelerazione in eq.(10) non dipende dal tempo e, quindi, il moto è uniformemente accelerato.

Dunque, $$v(t) = v_0 - (g \sin\, \theta)\, t/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2\, v_0 /(g \sin\, \theta) = 4.08 \text{ s} \tag{11}$$

Caso b) In questo caso il moto è di pura traslazione con accelerazione $a = - g \sin\theta$ e, quindi il tempo cercato è:

$$t = v_0 /(g \sin\, \theta) = 2.04 \text{ s} \tag{12}$$

In entrambi i casi si conserva l'energia meccanica (nel caso *a* la forza di attrito statico non compie lavoro mentre nel caso *b* non c'è attrito). Dunque i corpi tornano nella posizione iniziale con la stessa energia cinetica che avevano all'inizio e, quindi, con la stessa velocità.

Esercizio 3 – 3.1 - l'equilibrio termico implica che la temperatura del gas è T_0, mentre quello meccanico implica che la forza totale F applicata sulla parete mobile è pari a 0. Dunque,

$$p\,S - K\,(h - L) = 0 \quad , \quad \text{cioè} \qquad p = K\,(h - L)\,/\,S \tag{1}$$

d'altra parte, per la legge dei gas perfetti, $\quad p = n\,R\,T_0\,/(S\,h) \qquad (2)$

Uguagliando le pressioni in (1) e (2) si ottiene l'equazione quadratica in h

$$h^2 - L\,h - n\,R\,T_0\,/K = 0 \tag{3}$$

la cui soluzione positiva che è l'unica ad avere significato è

$$h = [\,L + (\,L^2 + 4\,n\,R\,T_0\,/K)^{1/2}]\,/2 = 0.216 \text{ m} \tag{4}$$

3.2- La trasformazione avviene molto lentamente e, quindi, avviene passando attraverso stati di equilibrio meccanico e termico (trasformazione reversibile). Ciò significa che, ad ogni istante, la forza esercitata dal gas sulla parete mobile deve essere uguale ed opposta alla forza di richiamo elastico esercitata dalla molla, cioè $F_{gas} = K\,(\,x - L)$ dove x è la lunghezza della molla inizialmente data da h in eq.(4). Alla fine del processo la temperatura è 2 T_0 e il valore finale di h sarà dato dall'equazione (4) dove al posto di T_0 si deve mettere 2 T_0.

Dunque, $$h_f = [\,L + (\,L^2 + 8\,n\,R\,T_0\,/K)^{1/2}]\,/2 = 0.279 \text{ m} \tag{5}$$

Il lavoro fatto dal gas per passare dalla posizione iniziale h in eq.(4) a quella finale h_f in eq.(5) è dato da

$$L = \int_h^{h_f} F_{gas}dx = \int_h^{h_f} K(x-L)dx = K(h_f - L)^2/2 - K(h - L)^2/2 = 93 \text{ J} \tag{6}$$

Osservazione : il risultato in (6) poteva anche essere ottenuto direttamente osservando che il lavoro fatto dal gas deve essere uguale ed opposto a quello fatto dalla forza elastica ($L_e = -\Delta U_e$) e, quindi, il lavoro fatto dal gas è $L = +\Delta U_e$ dove U_e è l'energia elastica della molla. Il calore Q si ottiene dal I Principio della Termodinamica:

$$Q = L + \Delta U \tag{7}$$

dove $$\Delta U = 3\,n\,R\,(2\,T_0)\,/2 - 3\,n\,R\,T_0\,/2 = 3\,n\,R\,T_0\,/2 = 374 \text{ J} \tag{8}$$

è la variazione di energia termica. Sostituendo i valori di eq.(6) ed eq. (8) nella (7) si trova

$$Q = 467 \text{ J}$$