Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE, CIVILE-AMBIENTALE , e EDILE. 19 Luglio 2018

Esercizio 1 – Un cilindro omogeneo (polistirolo espanso) ha massa M = 8 kg e raggio r = 50 cm. Un corpo di dimensioni trascurabili e massa m = 2 kg è attaccato al cilindro a distanza pari ad r dal centro O. Il sistema compie un rotolamento puro e, al tempo t = 0 si trova come in figura e il centro O del cilindro (non il centro di massa del sistema $M + m$!) viaggia con velocità v_0 = 2 m/s lungo l'asse x nel verso positivo. In queste condizioni si osserva che il punto O non si muove con velocità costante lungo x ma la sua velocità varia periodicamente.

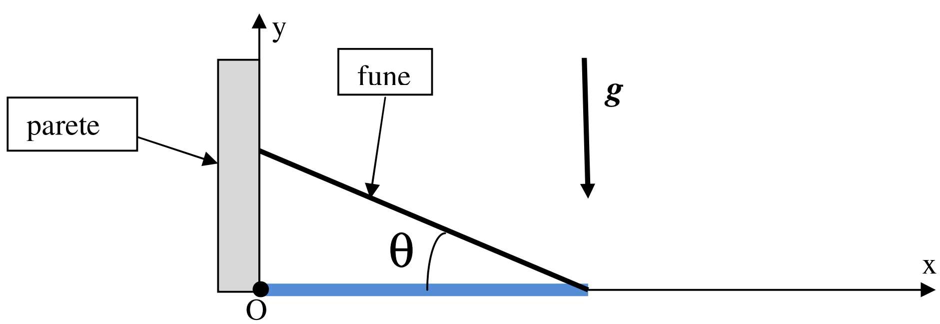
1.1 – si dica, giustificando la risposta, se durante il moto si conserva l'energia meccanica del sistema ($m + M$) (2 punti)

1.2 – Si trovi la velocità del punto O quando il corpo di massa m si trova a contatto con il terreno. (6 punti)

1.3 – Si trovi la differenza ΔR fra il modulo della reazione normale R esercitata dal terreno al tempo t = 0 e il modulo della forza peso totale agente sui corpi di massa m e M. (4 punti)

(per rispondere alle domande 1.2 e 1.3 si suggerisce di sfruttare il fatto che un moto di rotolamento puro è, istante per istante, un moto di rotazione attorno ad un asse passante per il punto di contatto)

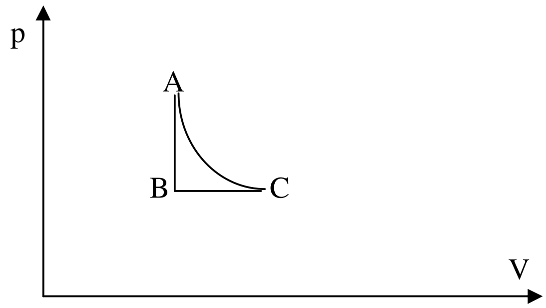
Esercizio 2 – Una barra rigida di massa M = 10 kg e lunghezza L = 20 cm può ruotare senza attrito attorno ad un asse passante per il punto O ad un estremo della sbarra. Il punto O è ad una distanza trascurabile dalla parete verticale come in figura. Una fune inestensibile di massa trascurabile è collegata ad una estremità della barra, mentre l'altra estremità della fune è fissata alla parete in modo da formare un angolo θ = 30°.



2.1- Si trovi la tensione della fune e le componenti R_x ed R_y della reazione dell'asse. (5 punti)

2.2- Ad un dato istante la fune si spezza e la barra inizia a ruotare attorno ad O. Si trovino i valori delle componenti R_x ed R_y della reazione dell'asse all'istante t = 0 immediatamente successivo alla rottura della fune (5 punti)

Esercizio 3 – Una mole di gas perfetto biatomico compie il ciclo *ABCA* mostrato in figura dove *CA* è una trasformazione adiabatica reversibile. La pressione e il volume nello stato *A* sono, rispettivamente $p_A = p_0 = 10^5$ Pa e $V_A = V_0 = 10^{-2}$ m^3 mentre la pressione in *B* è $p_B = p_0/2$.



3.1 – Si dica se il ciclo è reversibile e se rappresenta un motore o una pompa di calore (2 punti).

3.2 – Si calcoli il calore totale Q assorbito dal gas nell'intero ciclo (con il segno corretto). (5 punti)

3.3 - Si calcoli il valore minimo T_{min} e il valore massimo T_{max} della temperatura durante il ciclo. (4 punti)

(si usi il valore R = 8.316 J/ (mole K) per la costante dei gas)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1.1- Nel rotolamento puro il punto di contatto è istantaneamente fermo e, quindi, la forza di attrito non compie lavoro. Dunque, non essendo presenti altre forze non conservative, si conserva l'energia meccanica.

1.2- Assumendo 0 l'energia potenziale di un corpo ad altezza del pavimento, la conservazione dell'energia meccanica si scrive:

$$M\,g\,r + m\,g\,h\ + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2\ = c_0 \qquad (1)$$

Dove c_0 è una costante che può essere determinata dalle condizioni iniziali del moto, h è l'altezza del corpo di massa m rispetto a terra, v_m è la sua velocità, $I = Mr^2/2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto ad O e v è la velocità del centro di massa del cilindro (senza il corpo puntiforme). Poiché il centro del cilindro si mantiene sempre alla stessa altezza r dal suolo, il contributo Mgr in eq.(1) è costante e può essere inglobato nella costante definendo la nuova costante $c = c_0 - Mgr$. Sostituendo nella (1) il valore $I = Mr^2/2$, tenendo conto della relazione del moto di rotolamento $\omega = v/r$ e introducendo la nuova costante c, la (1) diventa

$$M\,g\,h + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{3}{4}Mv^2\ = c \qquad (2)$$

Al'inizio $h = 2\,r$ e $v = v_0$, inoltre, essendo un moto di rotolamento puro, la velocità del punto O e quella della massa m sono legate alla velocità angolare ω a quell'istante dalle relazioni

$$v_m = 2\,\omega r \qquad \text{e} \qquad v_0 = \omega r \qquad (3)$$

dunque,

$$v_m = 2\,v_0. \qquad (4)$$

Sostituendo $h = 2\,r$ e $v_m = 2\,v_0$ in eq.(2) si ottiene

$$2mgr + \left(2m + \frac{3}{4}M\right)v^2\ = c \qquad (5)$$

Sostituendo nella (5) i valori dati nel testo per $t = 0$, si ottiene

$$c = 59.6\ \text{J} \qquad (6)$$

Quando il corpo di massa m si trova a contatto con il terreno la sua velocità è pari a $v_m = 0$ (il punto di contatto è fermo nel rotolamento puro) e $h = 0$. Sostituendo questi valori nella (2) si trova

$$\frac{3}{4}Mv^2\ = c \qquad (7)$$

dove v è la velocità del centro O a questo istante che è, quindi, pari a

$$v = \sqrt{\frac{4c}{3M}} = 3.15\ \text{m/s} \qquad (8)$$

1.3- La reazione del pavimento è diretta lungo l'asse y nel verso positivo. La I equazione cardinale per la componente y è:

$$R - (m + M)g = \frac{d}{dt}P_y = \frac{d}{dt}P_{my} + \frac{d}{dt}P_{My} = m\,a_{my} + M\,a_{My} = m\,a_{my} \qquad (9)$$

dove P_y è la componente y della quantità di moto totale del sistema, P_{my} e P_{My} sono le componenti y delle quantità di moto dei corpi di massa m e M. Ma il baricentro O del corpo di massa M resta sempre alla stessa altezza r e, quindi, la sua accelerazione lungo y è nulla. Da ciò deriva che $a_{My} = 0$ in eq.(9) da cui si deduce l'ultimo termine a destra nella (9). Dunque, la (9) fornisce il valore incognito $\Delta R = R - (m+M)g$ che è

$$\Delta R = m\,a_{my} \qquad (10)$$

Il corpo di massa m quando si trova nella posizione iniziale come in figura avrà una accelerazione tangenziale lungo x e una accelerazione centripeta nel verso negativo dell'asse y. Dunque, a_{my} in eq.(10) è l'accelerazione centripeta. Il rotolamento puro è una rotazione attorno al punto di contatto istantaneo che si trova a distanza $2r$ dalla posizione della massa m. Poiché la velocità iniziale della massa m è $v_m = 2\,v_0$ (vedi eq.(4)) il modulo dell'accelerazione centripeta è $(2\,v_0)^2/(2\,r) = 2\,v_0^2/r$ e la (10) diventa:

$$\Delta R = -2\,m\,v_0^2/r = -32\text{ N} \qquad (11)$$

Soluzione Esercizio 2- 2.1- La barra è in equilibrio e, quindi, entrambe le componenti x ed y della forza agente su di essa devono essere nulle, dunque

$$F_x = -T\cos\theta + R_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = T\cos\theta \qquad (1)$$

$$F_y = T\sin\theta + R_y - M\,g = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y = -T\sin\theta + M\,g \qquad (2)$$

Anche la componente z (asse uscente dalla figura) del momento delle forze rispetto ad O deve essere nulla. La forza T ha braccio $L\sin\theta$ rispetto ad O mentre la forza peso, che è applicata al centro della barra, ha braccio $L/2$. Dunque, la componente z del momento di forza totale è:

$$T\,L\sin\theta - M\,g\,L/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T = M\,g\,/\,(2\sin\theta) = 98\text{ N} \qquad (3)$$

Sostituendo T di eq. (3) nella (1) e (2) si trova:

$$R_x = M\,g\,/\,(2\tan\theta) = 84.9\text{ N} \qquad (4)$$

$$R_y = M\,g\,/\,2 = 49\text{ N} \qquad (5)$$

2.2- Dopo la rottura della fune, la barra inizia a ruotare attorno all'asse. All'istante $t = 0$ essa ha velocità angolare $\omega = 0$ e ha un'accelerazione angolare che si ottiene dalla II equazione cardinale e che ha modulo

$$\alpha = M\,g\,L/\,(2\,I) = 3\,g/\,(2\,L) = 73.5\text{ rad/s}^2 \qquad (6)$$

Dove $I = M\,L^2/3$ è il momento di inerzia della barra rispetto all'estremo O. La reazione $\boldsymbol{R}$ della barra si ottiene utilizzando la I equazione cardinale

$$\boldsymbol{R} + M\boldsymbol{g} = M\boldsymbol{a} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{R} = M\boldsymbol{a} - M\boldsymbol{g} \qquad (7)$$

Dove $\boldsymbol{g} = (0, -g)$ ed $\boldsymbol{a}$ è l'accelerazione del centro di massa della barra che ruota su una circonferenza di raggio $L/2$ attorno ad O. Poiché la velocità angolare della barra è nulla all'istante $t = 0$, l'accelerazione centripeta del centro di massa è nulla all'istante $t = 0$ immediatamente successivo alla rottura della corda. Dunque, l'accelerazione è solo tangenziale diretta nel verso negativo dell'asse y e pari in modulo a $\alpha L/2$. Dunque

$$\boldsymbol{a} = (0, -\alpha L/2) = (0, -3\,g/4) \qquad (8)$$

Sostituendo la (8) nella (7) e calcolando le componenti x ed y di $\boldsymbol{R}$ si trova:

$$R_x = M\,a_x = 0 \qquad (9)$$

$$R_y = M\,a_y - M\,g_y = M\,g/4 = 24.5 \text{ N} \qquad (10)$$

Esercizio 3 – 3.1 - La trasformazione è rappresentata da curve continue e, quindi, è reversibile. Il ciclo è percorso in senso antiorario e, quindi, il lavoro fatto dal gas è negativo e il ciclo opera come pompa di calore.

3.2- Il calore viene scambiato solo nei tratti AB e BC perché il tratto CA è adiabatico. Per calcolare tutti i calori dobbiamo determinare in primo luogo il volume V_C dello stato C. Per ottenere questo parametro possiamo utilizzare il fatto che il tratto CA corrisponde ad una adiabatica reversibile dove vale la relazione generale:

$$p_A V_A^{\beta} = p_C V_C^{\beta} \qquad \Rightarrow \qquad V_C = V_A (p_A/p_C)^{1/\beta} = V_A (2)^{1/\beta} \qquad (1)$$

dove, $\beta = C_p/C_v$ e, per un gas biatomico, $1/\beta = 5/7$. Sostituendo quest'ultimo valore insieme a $V_A = V_0$ nella (1) si trova

$$V_C = 1.64\,V_0. \qquad (2)$$

Tratto AB – isocora reversibile. In questo tratto il lavoro è $L_{AB} = 0$ e, per il I Principio della Termodinamica, il calore assorbito è pari a

$$Q_{AB} = \Delta U = 5\,R\,T_B/2 - 5\,R\,T_A/2 = 5\,(p_B V_B - p_A V_A)/2 = -1.25\,p_0 V_0 \qquad (3)$$

Tratto BC – isobara reversibile. In questo caso, dal primo principio si deduce

$$Q_{BC} = L_{BC} + \Delta U = p_0 (V_C - V_0)/2 + 5\,p_0 (V_C - V_0)/4 = 7\,p_0 (V_C - V_0)/4 = 1.12\,p_0 V_0 \qquad (4)$$

dove, per ottenere l'ultimo termine a destra, abbiamo utilizzato la (2). Il calore totale assorbito nel ciclo è

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} = -0.13\,p_0 V_0 = -130 \text{ J} \qquad (5)$$

3.3 - La temperatura è massima o minima nei punti in cui è massimo o minimo il prodotto pV. Riportando in un grafico le isoterme che passano per i vari punti del ciclo, si vede immediatamente che l'isoterma più in alto è quella passante per il punto A mentre quella più in basso è quella che passa per il punto B. Di conseguenza

$$T_{max} = T_A = p_0 V_0 / R = 120 \text{ K} \qquad (6)$$

$$T_{\min} = T_B = p_0 V_0 /(2R) = 60 \text{ K} \tag{7}$$